

Construction de mobiles décoratifs

Dans cet exercice, nous nous intéressons à la modélisation de mobiles décoratifs tels que celui de la figure 1.



FIG. 1 – création J. Mitchell, site <http://glassmobiles.com/>

Ces mobiles sont constitués d'une barre suspendue à un fil, aux extrémités de laquelle sont suspendus soit un mobile, soit un élément décoratif. Tout le problème de la construction de tels mobiles est de s'assurer que les différentes barres restent horizontales (on parle d'équilibre du mobile).

NB : ces mobiles ont une structure "réursive".

1 Une première modélisation du problème

Comme nous l'avons vu, la propriété de base d'un mobile est l'équilibre statique. Si nous négligeons la masse des fils de suspension ainsi que celle des barres (ce que nous ferons dans un premier temps), un mobile est en équilibre si tous ses éléments respectent la loi des moments :

$$P_{M_g} L_g = P_{M_d} L_d \quad (*)$$

où P_{M_g} (resp. P_{M_d}) est le poids du mobile suspendu à l'extrémité gauche (resp. droite) et L_g (resp. L_d) la longueur entre le point de suspension et l'extrémité gauche (resp. droite).

Un mobile a une des deux formes suivantes :

- soit c'est un objet décoratif, sa modélisation peut se limiter à sa masse.
- soit c'est une barre avec deux mobiles suspendus aux extrémités. Il sera modélisé par un quadruplet :

$$(longueur, ratio, mob_{gauche}, mob_{droit})$$

où *longueur* est la longueur totale de la barre ($L_g + L_d$),

ratio est le rapport qui vérifie $L_g = ratio \times longueur$ et $L_d = (1 - ratio) \times longueur$

(par convention, nous mettrons toujours le mobile le plus lourd à gauche, ce qui induira $0 \leq ratio \leq 0.5$).

La masse d'un mobile "barre" est égale à la somme des masses des mobiles suspendus (sous l'hypothèse que la masse de la barre est négligeable).

En Caml, nous représenterons un mobile par une valeur du type :

```
type mobile =  
  Point of float  
  | Barre of float*float*mobile*mobile;;  
  (* longueur, ratio, mobg, mobd*)
```

1.1 Un premier mobile

- a) Exprimez le ratio d'un mobile **équilibré** en fonction des masses de ses mobiles gauche et droit.
- b) Donnez la valeur Caml qui modélise le mobile m1 suivant (*ul* représente une unité de longueur) :
une barre de 200 ul à laquelle sont suspendus
 - (à droite) un objet de 300 g
 - (à gauche) une barre de 150 ul à laquelle sont suspendus
 - (à droite) un objet de 250 g
 - (à gauche) une barre 100 ul à laquelle sont suspendus un objet de 200 g (à droite) et un objet de 300 g (à gauche)

1.2 Construction du mobile

L'objet des fonctions suivantes est de construire des mobiles qui sont équilibrés.

- a) Définissez une fonction `construit_point` de profil : `float -> mobile` qui, étant donné une masse, construit un mobile élémentaire.
- b) Définissez une fonction récursive `masse` de profil : `mobile -> float` qui, étant donné un mobile, calcule sa masse totale.
- c) Définissez une fonction `calcule_ratio` de profil : `mobile -> mobile -> float` qui, étant donné deux mobiles, calcule le rapport qui permet de déterminer les longueurs L_g et L_d garantissant l'équilibre.
- d) Définissez une fonction `construit_mobile` de profil :
`float -> mobile -> mobile -> mobile`
qui, étant donné la longueur de la barre et deux mobiles, construit le mobile équilibré correspondant (vous prendrez soin de mettre le mobile le plus lourd à gauche).
- e) Redéfinissez le mobile m1 (question précédente) en utilisant les fonctions `construit_point` et `construit_mobile`. Obtenez-vous un résultat identique ?

1.3 Vérification de l'équilibre d'un mobile

- a) Ecrivez un prédicat `equilibre` de profil : `mobile -> bool` qui teste si un mobile donné est équilibré.

rappel : un mobile est équilibré si son ratio vérifie l'équation d'équilibre (*).

b) Le mobile suivant :

Barre (100., 1./3., (Point 200.), (Point 100.))

devrait être équilibré. Votre prédicat donne-t-il la bonne réponse ? Sinon, pourquoi ? Pouvez-vous le corriger ?

2 Une seconde modélisation

Dans la réalité, si les fils sont effectivement négligeables, les barres le sont moins. En supposant qu'elles sont toutes de même section et fabriquées dans le même matériau caractérisé par une masse linéique de m_l g/ul (grammes par unité de longueur), l'équation d'équilibre devient :

$$P_{M_g}L_g + \int_0^{L_g} x m_l dx = P_{M_d}L_d + \int_0^{L_d} x m_l dx$$

- Dans quels calculs intervient la masse linéique m_l ?
- Donnez la formule du ratio $L_g/longueur$ dans cette nouvelle modélisation plus précise.
- Modifiez les fonctions de la partie 1 pour prendre en compte ce nouveau paramètre m_l .
- Vérifiez si le mobile `m1` satisfait cette nouvelle équation d'équilibre, et sinon, construisez un mobile `m1new` qui la vérifie.
(Testez votre nouvelle fonction `equilibre_bis` sur ce mobile.)