1 Programmation Linéaire 2006·2007

Les exercices ou questions précédés de **(*)** *sont à faire à la maison.*

Exercice 1.1 Une usine de textile fabrique 3 variétés de tissu T1, T2 et T3 à partir de 3 laines L1, L2 et L3. Le tableau suivant recense les poids (en kg) des laines intervenant dans la composition d'un mètre des tissus :

	T1	T2	T3
L1	0.375	0.125	0.1
L2	0.5	0.05	0.2
L3	0.5	0.2	0.15

On dispose d'un stock de 4000 kg de laine L1, 800 kg de laine L2 et 1500 kg de laine L3. Les métiers à tisser ne peuvent fabriquer que 8000 m de tissu. Les profits nets résultant de la vente d'un mètre de tissu sont respectivement de 2.6 €, 4 € et 3.6 € pour T1, T2 et T3.

Écrire le problème de maximisation du profit sous la forme d'un programme linéaire.

Exercice 1.2 Un constructeur de postes de télévision possède 4 modèles à son catalogue : le portatif N&B (M1), le standard N&B (M2), le standard couleur (M3) et le couleur de luxe (M4). L'entreprise comporte un atelier de montage et un de tests. Les durées nécessaires pour le montage et test des différents modèles sont (en heures) :

	M1	M2	M3	M4
Montage	8	10	12	15
Tests	2	2	4	5

La force de travail de l'atelier de montage est de 6000 heures/mois, celle de l'atelier de tests est de 1500 heures/mois et les profits des postes M1, M2, M3 et M4 sont respectivement de 400 €, 600 €, 800 € et 1000 €. L'entreprise dispose chaque mois de 450 transformateurs et de 300 tubes cathodiques couleur. On a besoin d'un transformateur dans chaque poste (N&B ou couleur). La quantité disponible de tubes cathodiques N&B n'est pas limitée.

Écrire le problème de maximisation du profit de cette entreprise sous la forme d'un programme linéaire.

(*) Exercice 1.3 Kathia se demande combien elle doit dépenser pour avoir au moins l'énergie (2000 Kcal), les protéines (55 g) et le calcium (800 mg) dont elle a besoin tous les jours. Elle choisit 5 types de nourriture qui lui semblent être des sources nutritives abordables.

Aliment	Portion	Énergie Kcal	Protéines g	Calcium mg	Prix €
porridge	28 g	110	4	2	3
poulet	100 g	205	32	12	24
lait	237 ml	160	8	285	9
tarte aux cerise	170 g	420	4	22	20
porc aux haricots	260 g	260	14	80	19

Kathia impose des contraintes supplémentaires sur la quantité maximum pour chaque aliment par jour : porridge 110 g, poulet 600 g, lait 2 l, tarte aux cerises 350 g, porc aux haricots 500 g.

Sachant que Kathia veut dépenser le moins possible, donner le programme linéaire correspondant.

Exercice 1.4 Une rivière dont le débit est 10000 m^3/jour contient trois polluants A, B et C. Les quantités (en kg/m^3) des polluants A, B et C que contient la rivière sont notés p_A, p_B et p_C. On peut utiliser, pour la dépollution, trois traitements T_1, T_2 et T_3 dont l'efficacité et le coût (en €/1000 m^3) sont :

	T_1	T_2	T_3
A	0.6	0.1	0.07
B	0.7	0.12	0.1
C	0.9	0.5	0.5
coût	3	10	18

Ce tableau s'interprète ainsi : si $x\,\mathrm{m}^3$ sont traités par le traitement $T2$, ces $x\,\mathrm{m}^3$ contiendront, après traitement, $0.1xp_A$ de polluant A, $0.12xp_B$ de polluant B et $0.5xp_C$ de polluant C, et le coût de ce traitement sera de $0.01x$ € $(10x/1000)$.

1. Sachant que l'on désire que le niveau de pollution de la rivière ne dépasse pas (en kg/m^3) $\overline{p_A}$ pour le polluant A, $\overline{p_B}$ pour le polluant B et $\overline{p_C}$ pour le polluant C, exprimer sous forme de programme linéaire le problème consistant à déterminer quelles quantités d'eau on doit traiter quotidiennement par chacun de ces traitements pour avoir un coût de dépollution minimum, sachant que les installations ne permettent pas de traiter une même quantité d'eau par deux traitements différents.
2. **(*)** Maintenant seul le polluant A est considéré et on veut réduire sa quantité de moitié. Montrer que le programme linéaire consistant à déterminer les niveaux de traitement à appliquer peut se formuler de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll}\max & -3x_1 - 10x_2 - 18x_3 \\ \text{s.c.} & \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 50 \geq 60x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 100x_4 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4 \end{array}\right.\end{array}$$

Exercice 1.5 Le problème est de prévoir la production d'une denrée par n usines dans le but de fournir m clients, pour une période de temps donnée. On considérera qu'il n'y a pas de stock et que les quantités produites sont écoulées pendant la période.

Pour la période de temps donnée, une usine i peut produire p_i kg de la denrée et un client j en demande v_j kg. Le coût de production (différent pour chaque usine suivant sa modernité) d'un kg par l'usine i est de c_i (en €) et le coût de livraison d'un kg de l'usine i au client j est de $d_{i,j}$ (en €).

Le but est de maximiser le profit. Identifier les variables du problème, puis formuler le problème comme un programme linéaire.

Maintenant, on souhaite instancier le programme générique par des données concrètes, soient :

$$n = 2,\ m = 3,\ \vec{p} = (400, 300),\ \vec{v} = (100, 200, 150),\ \vec{c} = (18, 15)$$

$\vec{d}$	Usine 1	Usine 2
Client 1	8	9
Client 2	10	12
Client 3	13	7

Écrire le programme linéaire correspondant.

(*) Exercice 1.6 Deux types de pétrole léger PL_1 et PL_2 sont produits dans une raffinerie en quantité respectives de 30 et 70 tonnes/jour. PL_1 a un taux d'octane de 104 et PL_2 a un taux d'octane de 94. Ces pétroles légers peuvent être mélangés dans n'importe quelle proportion et le taux d'octane du mélange obtenu varie linéairement avec les taux d'octane des parties constituant le mélange. C'est-à-dire que le mélange obtenu à partir de 2 tonnes de PL_1 et 3 tonnes de PL_2, qui pèsera 5 tonnes, aura un taux d'octane de

$$\frac{2 \times 104 + 3 \times 94}{5} = 98$$

De tels mélanges peuvent être obtenus sur le marché sous le nom de *Kérosène* si le taux d'octane est supérieur à 102 et de *super* si le taux d'octane est supérieur à 96. La demande maximum de Kérosène est 20 tonnes/jours, la demande de Super n'est pas limitée. La vente d'une tonne de Kérosène procure un profit de 150 €, la vente d'une tonne de Super donne un profit de 100 €.

Le problème consiste à déterminer quelles quantités de Kérosène et de Super produire à partir de PL_1 et PL_2 pour maximiser le profit tout en satisfaisant aux contraintes du problème.

Montrer que les contraintes sur les taux d'octane sont linéaires et formuler le problème comme un programme linéaire.

2 Programmation Linéaire 2006·2007

Exercice 2.1 En toute généralité, un problème linéaire est un ensemble d'équations et d'inéquations linéaires (appelées *contraintes*) sur des variables réelles avec une fonction objectif linéaire à optimiser (à maximiser ou à minimiser). On distingue deux manières particulières d'écrire un programme linéaire, qui sont :

la forme standard	*la forme canonique*
$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$	$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$

Peut-on écrire tout problème linéaire sous forme canonique et sous forme standard ?

Exercice 2.2 Résoudre graphiquement, puis mettre sous forme canonique :

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & \begin{cases} x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 2.3 On a 9 € pour acheter du sucre. Deux épiciers en vendent : le premier en a 8 kg à 0,90 €/kg et le deuxième 5 kg à 1,50 €/kg. Le but est d'en acheter le plus possible avec notre somme d'argent.

Résoudre ce problème de façon simple, formuler le problème linéaire, réaliser l'interprétation géométrique.

Exercice 2.4 Faire une résolution graphique des problèmes linéaires :

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 & (1) \\ x_1 - x_2 \geq -1 & (2) \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 & (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 & (1) \\ x_1 - x_2 \geq -1 & (2) \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 & (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq -2 & (1) \\ x_1 - x_2 \geq -1 & (2) \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 & (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 & (1) \\ x_1 - x_2 \geq -1 & (2) \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 & (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 2.5 La société X produit et commercialise deux sortes d'alcools. Elle achète des produits intermédiaires en citerne, les purifie par distillation, les mélange, met le produit final en bouteille sous son propre nom et les vend à des distributeurs.

L'un des produits est du bourbon et l'autre du whisky. Les ventes d'un produit sont indépendantes des ventes de l'autre et aucune limite des ventes n'a jamais été observée sur le marché !

Le bourbon demande 3 heures de machine par litre, mais à cause de contraintes supplémentaires de mélange, le whisky exige 4 heures de temps machine par litre. Une capacité totale de 20000 heures machine est disponible pour la période de production à venir. Une meilleure qualité rend les coûts opératoires directs de \$3 pour le bourbon et de \$2 pour le whisky. La trésorerie disponible pour la période est de \$4000 et il est anticipé que 45% des ventes de bourbon et 30% des ventes de whisky durant la période à venir pourront être réinvesties pour financer la production. Tous les coûts directs doivent être payés durant la période. Le bourbon est vendu aux distributeurs \$5 par litre et le whisky \$4.5 par litre.

1. Un problème survint alors entre les directeurs de la production et du marketing pour déterminer quelles devraient être les quantités respectives de whisky et de bourbon à produire durant la période. Formuler le problème. Est-il possible d'atteindre un profit de \$10000 ?
2. Une dispute s'engage entre le directeur de la production et le trésorier. On pourrait ajouter 2000 heures machine en réparant certaines machines indisponibles pour \$250. En raison de leur âge ces machines seraient cependant hors d'usage à la fin de la période de production. Pensez-vous qu'il faut ou qu'il ne faut pas réparer les machines pour maximiser le profit de la société ?

3 Programmation Linéaire 2006·2007

Exercice 3.1 Étant donné une $m \times n$-matrice A, un m-vecteur colonne b et un n-vecteur ligne c, on appelle *programme linéaire en nombres entiers* le problème d'optimisation (P). Lorsqu'on *relâche* les contraintes d'intégrité sur les variables ($x_j \in \mathbb{N}$) on obtient le *programme linéaire* (P').

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & \begin{cases} Ax \leq b \\ x_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n \end{cases} \end{array} \qquad (P') \quad \begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Quelles sont les relations entre (P) et (P') ?

Considérons le programme linéaire en nombres entiers :

$$(P_0) \quad \begin{array}{ll} \max & 10x_1 + 8x_2 + 5x_3 \\ \text{s.c.} & \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 9 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \end{cases} \end{array}$$

Quelle est la solution optimale de (P_0) ? Le programme linéaire relaxé (P'_0) a pour solution $x_1 = 1.5$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$. Quels liens y a-t-il entre cette solution et la solution de (P_0) ?

On considère maintenant le programme linéaire en nombres entiers

$$(P_1) \quad \begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ x_1 - 4x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \end{array}$$

Donner tous les couples $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ satisfaisant les contraintes du problème et donner la solution optimale.

Résoudre graphiquement (en s'aidant d'un diagramme dans le plan x_1, x_2) le programme linéaire (P'_1) obtenu à partir de (P_1) en relâchant les contraintes d'intégrité sur les variables.

Exercice 3.2 On considère le problème d'optimisation combinatoire :

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & \begin{cases} Ax = b \\ x_j \in D_j, j = 1, \dots, n \end{cases} \end{array}$$

où chaque D_j est un ensemble fini de valeurs (par exemple $\{1, 2.5, \pi, -1/e\}$).

Montrer que (P) peut s'écrire comme un programme linéaire en nombres entiers.

Exercice 3.3 On dispose de n objets ayant chacun un poids a_j et une valeur c_j ($j = 1, \dots, n$). Il faut effectuer une sélection $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ (déterminer un sous-ensemble de ces objets) dont le poids total est inférieur ou égal à un nombre b donné et dont la valeur totale (somme des valeurs des objets sélectionnés) est maximum.

Formuler le problème. Peut-on se ramener à un problème de programmation linéaire ? Pour trouver la meilleure solution on peut énumérer toutes les solutions possibles, combien en existe-t-il dans le pire des cas ? Enfin, quelle est la meilleure solution avec $n = 4$, $b = 30$, $a = (19, 17, 15, 13)$ et $c = (9, 7, 5, 4)$?

4 Programmation Linéaire 2006·2007

Les exercices ou questions précédés de **(*)** *sont à faire à la maison.*

Exercice 4.1 Soit le programme linéaire suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Écrivez le programme sous forme canonique.
2. Donnez une solution triviale réalisable du problème.
3. Trouvez une solution meilleure que la précédente si cela est possible.
4. Trouvez une solution optimale.

(*) Exercice 4.2 Soit le programme linéaire à résoudre par l'algorithme du simplexe. :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 30x_1 + 30x_2 + 40x_3 \\ \text{s.c.} & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2000 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 7000 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 4.3 Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 \\ \text{s.c.} & 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 44 \\ & 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 36 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Donnez la valeur de la fonction de coût à l'optimum.

(*) Exercice 4.4 Trouver la solution optimale de l'exercice 1.1

5 Programmation Linéaire 2006·2007

Les exercices ou questions précédés de **(*)** *sont à faire à la maison.*

Exercice 5.1 Soit le programme linéaire suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 2x_1 - x_2 - 4x_3 \\ \text{s.c.} & x_3 \leq 1 \\ & 2x_1 \leq 4x_2 + 3x_3 \\ & 3x_2 \leq x_1 + 2x_3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Donnez une solution triviale réalisable du problème.
Appliquez l'algorithme du simplexe ; que remarquez-vous ?

Exercice 5.2 Soit le programme linéaire suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \\ \text{s.c.} & x_5 = -0.5x_1 + 5.5x_2 + 2.5x_3 - 9x_4 \\ & x_6 = -0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 - x_4 \\ & x_7 = 1 - x_1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Appliquez l'algorithme du simplexe ; que remarquez-vous ?

Exercice 5.3 Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \text{s.c.} & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre le programme linéaire par l'algorithme du simplexe.

(*) Exercice 5.4 Trouver la solution optimale de l'exercice 1.2

6 Programmation Linéaire 2006·2007

Les exercices ou questions précédés de **(*)** *sont à faire à la maison.*

Exercice 6.1 Soit à résoudre le programme linéaire :

$$(P_\alpha)\left\{\begin{array}{l} z(max) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \alpha x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 13 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}\right.$$

On souhaite étudier les deux cas $\alpha = 0$ puis $\alpha = 1$.

1. Exprimer le problème auxiliaire en ajoutant le minimum de variables artificielles.
2. Trouver une solution optimale en utilisant le simplexe 2 phases. Quand le choix du pivot ne peut se faire sans connaître α, étudiez alors les deux cas $\alpha = 0$ puis $\alpha = 1$.

Exercice 6.2 Traiter géométriquement les problèmes suivants et appliquer le simplexe. Tirer des conclusions concernant le comportement du simplexe dans les cas limites.

1. $$\left\{\begin{array}{rl} \text{max.} & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & -x_1 - x_2 \leq -2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rl} \text{max.} & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \end{array}\right.$$

3. (*) $$\left\{\begin{array}{rl} \text{max.} & x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & -x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \end{array}\right.$$

4. (*) $$\left\{\begin{array}{rl} \text{max.} & x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & 2x_1 - x_2 \leq -1 \end{array}\right.$$

5. $$\left\{\begin{array}{rl} \text{max.} & x_1 - x_2 \\ \text{s.c.} & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & -x_2 \leq -1 \end{array}\right.$$

6. (*) $$\left\{\begin{array}{rl} \text{max.} & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq -5 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 9 \end{array}\right.$$

Exercice 6.3 Un problème linéaire peut (voir exercice 2.4) :

1. n'avoir aucune solution réalisable (le problème est insatisfiable) ;
2. avoir au moins une solution réalisable mais aucune solution optimale (le problème est non borné) ;
3. avoir une solution optimale (donc au moins une solution réalisable).

Lors de la phase 1 de la méthode du simplexe on introduit éventuellement des variables artificielles pour obtenir un problème auxiliaire.

Expliquez lesquels des trois cas énoncés ci-dessus sont possibles pour le problème auxiliaire. Vous devez justifier vos réponses.

Exercice 6.4 Trouver une solution admissible du problème :

$$\left\{\begin{array}{rl} \text{maximiser} & x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.c.} & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -5 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1 \end{array}\right.$$

7 Programmation Linéaire 2006·2007

Exercice 7.1 Reprendre le programme linéaire de l'exercice 4.1.

Trouvez un majorant de l'optimum. Essayez d'atteindre l'optimum trouvé dans l'exercice 4.1.

En déduire un programme linéaire dont l'optimum est un majorant de l'optimum du programme linéaire initial. Comparez le programme linéaire obtenu avec le programme dual du programme linéaire initial.

Donnez la solution optimale du programme dual.

Exercice 7.2 On généralise l'exercice 7.1. Soit le programme linéaire

$$\begin{cases} \max : \Sigma_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Le dual de ce problème est défini comme étant le programme linéaire

$$\begin{cases} \min : \Sigma_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \Sigma_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, \ldots, n \\ y_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Montrez que pour toute solution réalisable $(x_1, \ldots, x_n)$ du problème primal et toute solution réalisable $(y_1, \ldots, y_m)$ du problème dual on a :

$$\Sigma_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \Sigma_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Dans quel cas cela permet-il de prouver l'optimalité de la solution ? Énoncez le *théorème de dualité*.

Exercice 7.3 Remplissez le tableau suivant, en justifiant les réponses, avec “possible” ou “impossible” :

dual

primal	existe une sol. optimale	problème insatisfiable	problème non borné
existe une sol. optimale			
problème insatisfiable			
problème non borné			

Pour remplir les cases, vous utiliserez le théorème de dualité et les raisonnements de l'exercice 7.2. Pour remplir la case problème insatisfiable/problème insatisfiable, vous étudierez le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} max : 2x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8 Programmation Linéaire 2006·2007

Exercice 8.1 Enoncez le théorème des écarts complémentaires, puis vérifiez l'optimalité de la solution proposée pour le programme linéaire suivant : (vous devez vérifier l'optimalité sans chercher à résoudre le problème !)

$$\begin{cases} max : 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{solution : } x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = \frac{5}{3}, x_5 = 0$$

puis pour le programme :

$$\begin{cases} max : 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 - 5x_5 + 8x_6 \\ x_1 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \leq 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_5 + 3x_6 \leq 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 \leq 4 \\ -x_2 + 2x_4 + x_5 - 5x_6 \leq 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leq 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{solution : } x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{5}{2}, x_4 = \frac{7}{2}, x_5 = 0, x_6 = \frac{1}{2}$$

Indiquez le nombre de pivot qu'on pourrait être amener à faire dans le pire des cas pour résoudre le dual du second problème par la méthode du simplexe.

Exercice 8.2 Une entreprise fabrique deux produits P_1 et P_2 à l'aide de produits de base B_1, B_2 et B_3. Pour produire une unité du produit P_1 on mélange deux unités de produit B_1 avec une unité de produit B_2. Pour produire une unité de produit P_2 on mélange une unité de produit B_1, deux unités de produit B_2 et une unité de produit B_3.

L'entreprise dispose de huit unités de produit B_1, sept unités de produit B_2 et trois unités de produit B_3.

Le profit dû à la fabrication d'une unité de produit P_1 est égale à 4 Euro, de même le profit dû à la fabrication d'une unité de produit P_2 est égale à 5 Euro.

La tâche est de faire fonctionner cette entreprise de manière optimale, c'est-à-dire de rendre le profit maximum tout en respectant les contraintes de rareté sur les produits de base.

1. Formuler le problème, en posant : x_1 = nombre d'unités de P_1 produites et x_2 = nombre d'unités de P_2 produites.
2. Résoudre le problème (par la méthode que vous souhaitez).
3. Le fournisseur des produits B_1, B_2 et B_3 propose des quantités supplémentaires de chaque produit à des prix par unités respectifs de p_1, p_2 et p_3. On se demande combien il est raisonnable de dépenser pour acquérir une unité supplémentaire de chaque produit.
   (a) Quel prix maximum faut-il payer pour une unité de B_1 supplémentaire ?
   (b) Même question pour le produit B_2.
   (c) Comme tout le produit B_3 n'a pas été utilisé, on décide qu'on n'en rachètera pas quelque soit son prix. En effet, l'achat de B_3 supplémentaire rapportera 0 car il en reste en stock.
   Calculer la solution optimale du dual. Comparer les valeurs obtenues avec les prix auxquels on peut payer au maximum une unité supplémentaire de B_1, B_2 et B_3.
   (d) Le fournisseur propose $p_1 = 0.8$ Euro. Le directeur de l'entreprise décide d'acquérir dix unités supplémentaires de B_1 pour augmenter son profit. A-t-il raison ? Voyez-vous une explication ?
4. Rappeler l'interprétation économique des variables du dual.

9 Programmation Linéaire 2006·2007

Exercice 9.1 Une ferme en Illinois possède 120 acres de terres et 2 ouvriers qui y travaillent à l'année. Les activités de la ferme se divisent en deux groupes : la culture et l'élevage. Nous ne nous intéresserons qu'à l'aspect élevage. Les heures de travail disponibles pour l'élevage se répartissent comme suit :

Mois	Heures
Janvier	420
Février	415
Mars	355
Avril	345
Mai	160
Juin	95
Juillet	380
Août	395
Septembre	270
Octobre	230
Novembre	310
Décembre	420

Cinq types d'élevage principaux sont adaptés à la région concernée :

1. porcs nés au printemps,
2. porcs nés en automne,
3. vaches nourries de farines séchées (ou vaches folles),
4. vaches nourries de pâturages,
5. vaches à nourriture mixte.

Pour ce qui est des porcs, ceux-ci naissent soit au printemps, soit en automne et sont vendus environ six mois plus tard. Les vaches sont achetées en Octobre et revendues environ un an plus tard. La quantité de travail nécessaire pour ces différents types d'élevage est donnée dans le tableau ci-dessous.

Quantité de travail estimée (en heures par animal) :

	Type d'élevage				
Mois	1	2	3	4	5
Janvier	1.4	1.8	1.5	1.4	1.4
Février	9.8	2.4	1.4	1.4	1.4
Mars	4.0	0.4	1.4	1.4	1.4
Avril	2.8	0.6	1.3	1.4	1.5
Mai	2.2	0.4	1.3	1.5	1.2
Juin	2.2	0.4	1.3	1.3	1.2
Juillet	2.2	0.6	1.3	1.3	1.2
Août	2.6	5.8	1.5	1.5	1.2
Septembre	0.6	4.0	1.3	—	—
Octobre	0.6	1.2	1.3	1.3	2.6
Novembre	0.6	1.8	1.2	1.2	1.2
Décembre	0.6	1.8	1.5	1.4	1.4

En plus du travail, chaque type de bétail exige une certaine quantité de nourriture (pâturages ou foin). L'unité de pâturage est la journée de pâturage qui correspond à la quantité de pâturage consommée en un jour par une vache adulte ne recevant aucune autre nourriture. Les pâturages sont utilisés d'Avril à Septembre. Pendant cette période, on peut également le convertir en foin. La disponibilité de pâturage et la consommation en fonction du type d'élevage est donnée en dessous.

Quantité de pâturage requise :

	Quantités nécessaires					
Période	1	2	3	4	5	Disponibilité
Avril-Mai	16	0	0	12	35	5200
Juin-Juillet	20	0	0	36	50	5200
Août-Septembre	16	0	0	12	35	3600
Total	52	0	0	60	120	14000

Les quantités nécessaires ainsi que leur disponibilités sont données en jour de pâturage. On peut transformer les pâturages en foin à raison de 5.5 heures et 50 jours de pâturages par tonne de foin. A l'exception des porcs nés au printemps, la demande en foin à l'année pour les autres types d'élevage est de :
– 0.1 tonne par portée de porcs nés en automne,
– 0.9 tonne par veau nourri de farines séchées,
– 0.8 tonne par veau nourri de pâturages,
– 2.3 tonnes par veau à nourriture mixte.
Enfin les profits nets pour les cinq types d'élevage sont :

1. \$139 par portée,
2. \$88 par portée,
3. \$133 par vache,
4. \$137 par vache,
5. \$165 par vache.

On demande de conseiller la ferme sur les acquisitions à faire et sur la quantité de foin à produire, ainsi qu'éventuellement de proposer des modifications de l'organisation qui pourraient amener à de meilleurs profits.

10 Programmation Linéaire 2006·2007

Les exercices ou questions précédés de (*) *sont à faire à la maison.*

Exercice 10.1 New Forest est une forêt d'environ 145 miles carré située dans le Hampshire en Angleterre. Les surfaces sont donnés en acres, les volumes en stères (st) et les prix en livres (£). La direction de New Forest doit décider d'un programme d'abattage concernant une surface d'environ 30000 acres, l'objectif étant de maximiser le revenu net sur une période de 10 ans. Le problème que nous considérons concerne uniquement une partie de cette surface ; environ 8500 acres plantés de différentes essences comme le résume le tableau ci-dessous :

Types	Description	Acres	Volume coupé (st/acre)
1	Feuillus fort volume	2754	4.5
2	Feuillus volume moyen	850	2.7
3	Feuillus faible volume	855	1.575
4	Conifères	1598	9
5	Forêt mixte	405	5.625
6	Terrain nu	1761	

La classification des parcelles plantées de feuillus se fait ensuite en discernant ceux pour lesquels le sous-bois est complet, partiel ou inexistant, comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

	Sous-bois complet	Sous-bois partiel	Sous-bois inexistant	Total
Feuillus fort volume	357	500	1897	2754
Feuillus volume moyen	197	130	523	850
Feuillus faible volume	39	170	646	855

Toute surface de n'importe quel type peut recevoir l'un des deux traitements suivants : abattre les arbres et planter des conifères (traitement 1A) ou abattre les arbres et planter des feuillus (traitement 1B). Lorsque ces traitements s'appliquent au terrain nu, ces traitements deviennent : planter des conifères et planter des feuillus. De plus, pour les surfaces de feuillus dont le sous-bois est complet, la direction a l'option d'abattre en conservant le sous-bois (traitement 2). De même, pour les surfaces dont le sous-bois est partiel, une option possible est d'abattre en enrichissant le sous-bois (traitement 3). Enfin, une dernière option disponible pour tout type de surface est bien sûr de n'appliquer aucun traitement.

Le revenu net prévisionnel planifié sur 10 ans varie en fonction des traitements appliqués et des types de plantation existants. Ces chiffres en £/acre sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Traitement				
Type	1A	1B	2	3	Aucun
1	287	215	228	292	204
2	207	135	148	212	148
3	157	85	98	162	112
4	487	415	–	–	371
5	337	265	–	–	264
6	87	15	–	–	61

De plus, la direction impose les contraintes suivantes :
- la surface traitée ne peut excédée 5000 acres,
- la surface de conifères après traitement ne doit pas excéder 3845 acres,
- le volume de feuillus abattus ne doit pas excéder 5490 stères,
- le volume de conifères et de forêt mixte abattus ne doit pas excéder 9360 stères,
- au moins 500 acres doivent être plantés de feuillus.

1. Exprimer sous la forme d'un problème linéaire.
2. Rédiger votre analyse et vos conseils pour la société qui gère New Forest, en particulier en tenant compte des valeurs pour l'optimum du dual.

(*) Exercice 10.2 Une raffinerie de pétrole produit 4 types de carburants : *alkylate*, *catalytic cracked*, *straight run* et *isopentane*. Deux caractéristiques physiques importantes pour chaque carburant sont son indice de performance *PN* (qui indique ses propriétés antidétonnantes) et sa pression de vapeur *RVP* (qui indique le degré de volatilité). Ces deux caractéristiques, ainsi que les niveaux de production (en barils/jour) sont donnés dans le tableau suivant :

	PN	RVP	Production
Alkylate	107	5	3814
Catalytic cracked	93	8	2666
Straight run	87	4	4016
Isopentane	108	21	1300

Ces carburants peuvent être vendus soit purs à \$4.83 le baril, soit mélangés pour produire des carburants pour l'aviation (essence AVA et essence AVB). Les standards de qualité imposent certaines contraintes sur les carburants réservés à l'aviation : ces contraintes, ainsi que les prix de vente sont résumés dans le tableau suivant :

	PN	RVP	Prix au baril
Essence AVA	au moins 100	au plus 7	\$6.45
Essence AVB	au moins 91	au plus 7	\$5.91

Le PN et le RVP des mélanges sont simplement calculés à l'aide de la moyenne pondérée de leur constituants.

1. Formuler et résoudre le problème.
2. Une autre stratégie possible consiste à :
   - mélanger 3754 barils d'alkylate, 2666 barils de catalytic cracked, 920 barils de straight run et 543 barils d'isopentane pour faire 7883 barils d'essence AVA.
   - mélanger 60 barils d'alkylate, 3096 barils de straight run et 672 barils d'isopentane pour faire 3828 barils d'essence AVB.
   - vendre 85 barils d'isopentane pur.

   Étudier l'optimalité de cette stratégie.
3. Dans la solution optimale, 85 barils d'isopentane pur sont vendus. Trouver le seuil de rentabilité pour l'alkylate pur, le catalytic cracked pur et le straight run pur (c'est à dire le prix à partir duquel il faudrait vendre le baril de ces carburants pur pour que ce soit plus rentable que de les mélanger).
4. Supposons qu'il y ait une demande pour un carburant d'aviation AVC de PN au moins 80 et de RVP au plus 7. Quel est le seuil de rentabilité de ce carburant ?

11 Programmation Linéaire 2006·2007

Les exercices ou questions précédés de **(*)** *sont à faire à la maison.*

Exercice 11.1 Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} max : 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 8x_5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

1. Réécrire ce programme sous la forme :
   $max :\quad C_N x_N + C_B x_B$
   $s.c.\quad A_N x_N + A_B x_B = b$
   (avec x_B les variables de la base et x_N les variables hors base).
2. Donner une solution évidente.
3. Résoudre par le simplexe révisé (en faisant le premier pivot sur x_4).

Algorithme du simplexe révisé
À chaque itération :

1. Résoudre $yA_B = C_B$.
2. Choisir une colonne entrante (i.e. une colonne a de A_N telle que ya est inférieur au coefficient de C_N). Si une telle colonne n'existe pas alors la solution courante est optimale.
3. Résoudre $A_B d = a$.
4. Trouver le plus grand t tel que $x_B - td \geq 0$. Si un tel t n'existe pas alors le problème n'est pas borné. Sinon, au moins une des composantes de $x_B - td$ est égale à 0 et la variable correspondante est la variable sortante.
5. Échanger la colonne sortante de A_B, C_B et la colonne entrante de A_N, C_N. Échanger la variable sortante et la variable entrante dans x_B et x_N. Calculer la nouvelle solution en fixant la valeur de la variable entrante à t et en remplaçant les autres valeurs des variables de base de x_B par $x_B - td$.

(*) Exercice 11.2 Résoudre avec la méthode du simplexe révisé :

$$\begin{cases} max : 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$