

Le phénomène de Kunze–Stein

(un ancêtre de la propriété DR)

Jean–Philippe Anker

Université d'Orléans & CNRS
Laboratoire MAPMO (UMR 6628)
Fédération Denis Poisson (FR 2964)

12 octobre 2007 / Journées PAG

G groupe (localement compact) unimodulaire

Problème : $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$?

Inégalité implicite : $\|f * g\|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

Young : $G = \mathbb{R}^n$

$L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G) \iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$

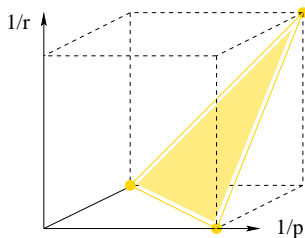
Démonstration :

\Leftarrow : interpolation à partir des cas triviaux

$L^1 * L^1 \subset L^1$

$L^1 * L^\infty \subset L^\infty$

$L^\infty * L^1 \subset L^\infty$

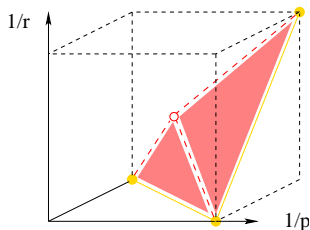


\Rightarrow : homothéties (*rescaling*)

G groupe de Lie semi-simple (non compact, centre fini)

Phénomène de Kunze–Stein : énoncés équivalents

- $L^p(G) * L^2(G) \subset L^2(G) \quad \forall 1 \leq p < 2$
- $L^2(G) * L^2(G) \subset L^{2+\varepsilon}(G) \quad \forall \varepsilon > 0$
- $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$ dans les cas suivants



Historique :

- $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$: Kunze & Stein
- **cas général** : Cowling

- dém. initiale \rightsquigarrow formule Plancherel (Harish–Chandra)

$$L^2(\mathbf{G}) \stackrel{\text{Fourier}}{\cong} \int_{\widehat{\mathbf{G}}}^{\oplus} d\nu(\pi) \mathcal{H}_{\pi} \otimes \mathcal{H}_{\pi}^* = \int_{\mathfrak{a}^+}^{\oplus} \frac{d\lambda}{|\mathbf{c}(\lambda)|^2} \mathcal{H}_{\pi_{\lambda}} \otimes \mathcal{H}_{\pi_{\lambda}}^* \oplus \dots$$

$\pi_{\lambda} = \text{Ind}_{P=MAN}^{G=KAN} \mathbf{1} \otimes e^{i\lambda} \otimes \mathbf{1}$ série principale sphérique

- Herz : réduction de $L = \text{repr. rég. de } G \text{ sur } L^2(G)$
à $\pi_0 = \text{repr. quasi-rég. de } G \text{ sur } L^2(G/P) = L^2(K/M)$

- Principe de majoration :

$\forall f, g \in L^2(\mathbf{G}), \exists \xi, \eta \in L^2(K/M)$ t.q.

$$\begin{cases} \xi \geq 0, \|\xi\| = \|f\|; \eta \geq 0, \|\eta\| = \|g\| \\ |\langle L(x)f | g \rangle| \leq \langle \pi_0(x)\xi | \eta \rangle \quad \forall x \in \mathbf{G} \end{cases}$$

- Contenance faible $\pi_0 \prec L$:

$\forall \xi, \eta \in L^2(K/M), \exists f_j, g_j \in L^2(\mathbf{G})$ t.q.

$$\begin{cases} \|f_j\| \rightarrow \|\xi\|, \|g_j\| \rightarrow \|\eta\| \\ \langle L(x)f_j | g_j \rangle \rightarrow \langle \pi_0(x)\xi | \eta \rangle \text{ unif. sur tout compact} \end{cases}$$

- Conséquence : $\|L(\mu)\| = \|\pi_0(\mu)\| \quad \forall \mu \geq 0$

- Cas particulier: μ bi- K -invariante

$$\|L(\mu)\| = \langle \pi_0(\mu)1 | 1 \rangle = \int_G d\mu(x) \varphi_0(x)$$

$\varphi_0(x) = \langle \pi_0(x)1 | 1 \rangle$ fonction sphérique fondamentale

- Remarques:

- $L^2(G) * L^2(G) \subset L^2(G) \iff G$ compact

- G moyennable non compact

$$\implies L^2(G) * L^2(G) \not\subset L^r(G) \quad \forall 2 < r < \infty$$

- résultat limite (*endpoint*) ?

$$\begin{cases} p \nearrow 2 \text{ dans } L^p(G) * L^2(G) \subset L^2(G) \\ r \searrow 2 \text{ dans } L^2(G) * L^2(G) \subset L^r(G) \end{cases}$$

- convolution \rightsquigarrow techniques réelles !

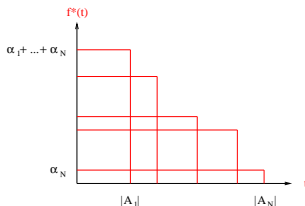
- Herz \sim **propriété DR** (exposé Christophe Pittet):
 $L^2(G, dx) * L^2(G, dx) \subset L^2(G, w(x)^{-1} dx)$
 w poids polynomial lié au comportement de φ_0
- rang 1
 - Lohoué & Rychener: $1 < p < 2$
 $L^{p,1}(G/K)$ algèbre de convolution
 - Pytlik: arbres homogènes
 - Cowling: $1 < p < 2$, $1 \leq a, b, c \leq \infty$ avec $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \geq 1$
 $L^{p,a}(G) * L^{p,b}(G) \subset L^{p,c}(G)$
 - Ionescu: $L^{2,1}(G) * L^{2,1}(G) \subset L^{2,\infty}(G)$
 - Veca: arbres homogènes
- rang supérieur
 - Ionescu: $O^{p,1}(G) * L^p(G) \subset L^p(G) \quad \forall 1 < p \leq 2$

Espaces de Lorentz :

$$|f| = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \text{ avec } \begin{cases} \alpha_1, \dots, \alpha_N > 0 \\ A_1 \subset \dots \subset A_N \end{cases}$$

\rightsquigarrow réarrangement décroissant

$$f^* = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbb{1}_{]0, |A_j|]}$$



$$\|f\|_{L^{p,a}} = \begin{cases} \left(\frac{a}{p} \int_0^\infty \frac{dt}{t} [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^a \right)^{\frac{1}{a}} & \text{si } 1 \leq a < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{si } a = \infty \end{cases}$$

inclusions : $L^{p,1} \subset L^{p,p} = L^p \subset L^{p,\infty}$

- rang 1

- démonstration \rightsquigarrow estimation

$$\int_G dx (\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_B)(x) \mathbf{1}_C(x) \lesssim |A|^{\frac{1}{2}} |B|^{\frac{1}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}$$

- inégalité fondamentale :

$$\int_G dx (f * g)(x) h(x) \leq \int_G dx (f_{\text{rad}}^* * g_{\text{rad}}^*)(x) h_{\text{rad}}^*(x)$$

où $f_{\text{rad}}^*(r) = f^*(|B_r|)$ réarrangement radial sur G

- $G = \mathbb{R}^n$: Riesz

- rang supérieur

- espaces d'Orlicz

$$\|f\|_{O^{p,1}} = \int_0^\infty dt (1+t)^{-\frac{1}{p'}} [\log(2+t)]^{\frac{d}{p'}} f^*(t)$$

$$\text{où } d = \begin{cases} \ell - 1 & \text{si } 1 < p < 2 \\ \ell + 2|\Sigma_0^+| & \text{si } p = 2 \end{cases}$$

- démonstration \rightsquigarrow Fourier ...

- M.G. Cowling, *The Kunze–Stein phenomenon*, Ann. Math. 107 (1978), 209–234
- M.G. Cowling, *Herz “principe de majoration” and the Kunze–Stein phenomenon*, dans *Harmonic analysis and number theory (Montreal 1996)*, CMS Conf. Proc. 21, Amer. Math. Soc. (1997), 73–88
- C.S. Herz, *Sur le phénomène de Kunze–Stein*, C. R. Acad. Sci. Paris Série A 271 (1971), 491–493
- A.D. Ionescu, *An endpoint for the Kunze–Stein phenomenon and related maximal operators*, Ann. Math. 152 (2000), 259–275
- A.D. Ionescu, *Rearrangement inequalities on semisimple Lie groups*, Math. Ann. 332 (2005), 739–758

- R.A. Kunze & E.M. Stein, *Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 unimodular group*, Amer. J. Math. 82 (1960), 1–62
- N. Lohoué & Th. Rychener, *Some function spaces on symmetric spaces related to convolution operators*, J. Funct. Anal. 55 (1984), 200–219
- T. Pytlik, *Radial convolutors on free groups*, Studia Math. 78 (1984), 179–183
- A. Veca, *The Kunze–Stein phenomenon on the isometry group of a tree*, Bull. Austral. Math. Soc. 65 (2002), 153–174