

Plongements quasiisométriques du groupe de Heisenberg dans L^p , d'après Cheeger, Kleiner, Lee, Naor

P. Pansu

October 14, 2007

Théorème

(J. Cheeger, B. Kleiner, 2006). *Le groupe d'Heisenberg (\mathbb{H}, d) n'admet pas de plongement bilipschitzien dans L^1 .*

Théorème

(J. Lee, A. Naor, 2006). *Il existe une distance invariante à gauche équivalente d' sur le groupe d'Heisenberg telle que $(\mathbb{H}, d'^{1/2})$ se plonge isométriquement dans L^2 .*

Plan de l'exposé

1. Liens avec la propriété de Haagerup
2. Motivation provenant de l'informatique théorique
3. Résultats antérieurs sur le problème de plongement
4. Preuve du théorème de non plongement dans L^1

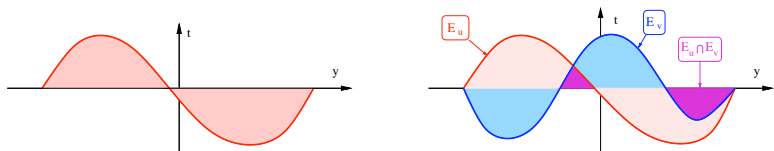
Remarque

P. Assouad (1977), sauf la terminologie. Une structure d'espace à murs mesurés, c'est équivalent à un plongement isométrique dans L^1 .

Preuve de \Rightarrow . Soit d l'écart associé à une structure d'espace à murs mesurés. Fixons une origine $o \in X$. Soit $W(x)$ l'ensemble des murs qui séparent x de o . Alors $x \mapsto \mathbf{1}_{W(x)}$ plonge (W, d) isométriquement dans $L^1(\mathcal{W}, \mu_d)$.

Définition

L'épigraphe d'une fonction $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ est $E_u = \{(y, t) \in Y \times \mathbb{R} \mid t^{-1}u(y) > 1\}$.



Lemme

Si $u, v \in L^1(Y, \nu)$, $\|u - v\|_{L^1} = (\nu \otimes dt)(E_u \Delta E_v)$.

Preuve de \Leftarrow . Soit $f : X \rightarrow L^1(Y, \nu)$. A chaque $(y, t) \in Y \times \mathbb{R}$, correspond un mur $W(y, t) = \{x \in X \mid (y, t) \in E_{f(x)}\} = \{x \in X \mid t^{-1}f(x)(y) > 1\}$. Soit $\mu_f = W_*(\nu \otimes dt)$. Alors pour tous $x, x' \in X$,

$$\begin{aligned}d(f(x), f(x')) &= \|f(x) - f(x')\|_{L^1} = (\nu \otimes dt)(E_{f(x)} \Delta E_{f(x')}) \\&= \int_{Y \times \mathbb{R}} |\mathbf{1}_{E_{f(x)}}(y, t) - \mathbf{1}_{E_{f(x')}}(y, t)| d\nu(y) dt \\&= \int_{Y \times \mathbb{R}} |\mathbf{1}_{W(y, t)}(x) - \mathbf{1}_{W(y, t)}(x')| d\nu(y) dt \\&= \int_{\mathcal{W}} |\mathbf{1}_W(x) - \mathbf{1}_W(x')| d\mu_f(W).\end{aligned}$$

Théorème

6 auteurs (2007). *Sont équivalents, pour G localement compact et σ -compact.*

- ▶ G admet une action isométrique propre sur un sous-ensemble de L^1 .
- ▶ G est a - T -menable.

Question

Est-ce tout plongement intéressant dans L^2 s'obtient en plongeant isométriquement dans L^1 puis en plongeant stupidement L^1 dans L^2 ?

Un plongement d'un espace métrique fini dans l'espace euclidien ou/et dans ℓ^1 intervient souvent dans les algorithmes de base de l'informatique théorique. On va le voir pour le problème Sparsest Cut.

Le meilleur algorithme connu pour une résolution approchée de Sparsest Cut, SDP (je vais l'expliquer), donne, dans le pire des cas, pour un graphe à n sommets, une réponse qui diffère de l'optimum d'un facteur au plus égal à la constante L_n définie comme suit.

Notation

On considère tous les espaces métriques à n points (X, d) tels que $(X, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans l'espace euclidien. Soit L_n le plus petit L tel que tous ces espaces admettent un plongement L -lipschitzien et qui augmente les distances dans ℓ^1 .

M.X. Goemans (in 1997) et N. Linial (in 2002) ont demandé si L_n est borné indépendamment de n .

En 2005, S. Khot et N. Vishnoi ont donné un contre-exemple.

Les boules du graphe de Cayley du groupe de Heisenberg discret fournissent d'autres contre-exemples, plus naturels et ayant des propriétés supplémentaires.

Problème

Sparsest Cut consiste à calculer la constante de Cheeger d'un graphe fini.

Une *coupure* dans un graphe pondéré G est une partition des sommets en $G^0 = S \cup \bar{S}$.

$$\Phi(S) = \frac{\#\partial S}{\#S \#\bar{S}}.$$

La *constante de Cheeger* de G est $\Phi^*(G) = \min_{\emptyset \subsetneq S \subsetneq G^0} \Phi(S)$.

Le calcul exact de Φ^* est NP-difficile. Mais une coupure (presque) optimale est fréquemment utilisée dans des algorithmes.

Arithmétisation

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{\text{arêtes } uv} m(uv) |1_S(u) - 1_S(v)|}{\sum_u \sum_v |1_S(u) - 1_S(v)|}.$$

Soit $d(u, v) = |1_S(u) - 1_S(v)|$. C'est une semi-distance sur G^0 , induite par une application vers l'espace métrique à 2 points $\{0, 1\}$. L'enveloppe convexe de ces semi-distances est exactement l'ensemble des semi-distances plongeables dans ℓ^1 . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \min_{d \text{ plongeable dans } \ell^1} \frac{\sum_{\text{arêtes } uv} m(uv) d(u, v)}{\sum_u \sum_v d(u, v)} \\ &= \min \left\{ \sum_{\text{arêtes } uv} m(uv) d(u, v) \mid d \text{ plongeable dans } \ell^1, \sum_u \sum_v d(u, v) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Malheureusement, le problème de décider si un espace métrique fini est plongable ou non dans ℓ^1 est NP-complet.

Relaxation. Oublions la condition de plongabilité dans ℓ^1 . Cela ramène à un problème de programmation linéaire, noté LP, pour lequel il existe des algorithmes polynômiaux. Soit Φ^{LP} le minimum de ce problème.

Théorème

(J. Bourgain, 1985). *Tout espace métrique à n points se plonge dans L^2 (et donc dans ℓ^1) avec distorsion au plus $O(\log(n))$. C'est optimal.*

Corollaire

$$\Phi^{LP} \leq \Phi^* \leq C \log(n) \Phi^{LP},$$

ce qui montre que LP fournit une approximation de Φ^ à un facteur multiplicatif $\log(n)$ près.*

Preuve. La métrique d' plongable dans ℓ^1 qui est $O(\log(n))$ -proche de la solution d de LP satisfait

$$\Phi^* \leq \Phi(d') \leq C \log(n) \Phi^* = C \log(n) \Phi^{LP}.$$

Procédure d'arrondi. (N. Linial, E. London, Y. Rabinovich, 1995). Le plongement de Bourgain est calculable en temps polynômial, on peut en tirer une coupure S qui réalise approximativement Φ^{LP} .

Arithmétisation.

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{\text{arêtes } uv} m(uv) |1_S(u) - 1_S(v)|^2}{\sum_u \sum_v |1_S(u) - 1_S(v)|^2}.$$

Relaxation. On autorise des fonctions $x : G^0 \rightarrow L^2$ et non seulement à valeurs dans $\{0, 1\}$, en gardant la contrainte

$$\forall u, v, w \in G^0, \quad |x(u) - x(v)|^2 \leq |x(u) - x(w)|^2 + |x(w) - x(v)|^2,$$

satisfaite par les fonctions caractéristiques. Cela ramène à un problème de programmation semi-définie, noté SDP, pour lequel il existe des algorithmes polynômiaux. Soit $\Phi^{SDP} = \Phi(x)$ son minimum.

Soit $d(u, v) = |x(u) - x(v)|^2$. C'est une semi-distance sur G^0 , et $d^{1/2}$ est induite par un plongement dans l'espace euclidien. Par conséquent,

$$\Phi^{SDP} = \min \left\{ \sum_{\text{arêtes } uv} m(uv) d(u, v) \mid d \text{ distance, } \sqrt{d} \text{ plongeable dans } L^2, \sum_u \sum_v d(u, v) = 1 \right\}.$$

Clairement,

$$\Phi^{SDP} \leq \Phi^* \leq L_n \Phi^{SDP},$$

ce qui montre que Φ^* est calculable en temps polynômial à un facteur multiplicatif L_n près.

Théorème

(S. Arora, J. Lee, A. Naor, 2005). Soit (X, d) un espace métrique à n points. On suppose que $(X, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans L^2 . Alors (X, d) se plonge aussi dans L^2 avec distorsion $O(\sqrt{\log(n)} \log(\log(n)))$.

Remarque

C'est presque optimal, puisque l'ensemble des sommets du n -cube ℓ^1 ne se plonge pas dans L^2 avec distorsion $< \sqrt{n}$ (Enflo, 1969).

Corollaire

$L_n = O(\sqrt{\log(n)} \log(\log(n)))$.

En effet, L^2 se plonge isométriquement dans L^1 .

Remarque

La non plongeabilité du groupe de Heisenberg entraîne une borne inférieure sur L_n . Cheeger, Kleiner and Naor annoncent qu'elle peut être rendue effective. Cela donne $L_n = \Omega(\log(n)^\delta)$ pour un $\delta > 0$.

Conclusion

L'approche SDP donne actuellement la meilleure solution connue du problème Sparsest Cut général. Dans le cas particulier où les poids sont tous égaux, S. Arora, E. Hazan, S. Kale (2004) donnent un algorithme polynômial différent qui calcule Φ^* à une facteur $O(\sqrt{\log(n)})$ près.

Théorème

(Semmes, 1996). \mathbb{H} ne se plonge pas quasiisométriquement dans un espace de Banach de dimension finie.

Théorème

(Pauls, 2001). \mathbb{H} ne se plonge pas quasiisométriquement dans un espace de Hilbert, ni, plus généralement, dans un espace CAT(0).

Théorème

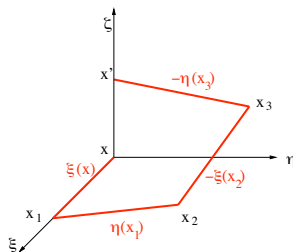
(Cheeger-Kleiner, 2006).

1. \mathbb{H} ne se plonge pas quasiisométriquement dans un espace de Banach qui possède la propriété de Radon-Nikodym.
2. Il y a de bons espaces (doublants, inégalité de Poincaré) qui se plongent quasiisométriquement dans L^1 mais pas dans ℓ^1 .

Définition

Le groupe d'Heisenberg \mathbb{H} est le groupe de Lie de dimension 3 dont l'algèbre de Lie a pour base ξ , η et ζ tels que $[\xi, \eta] = \zeta$. Les champs de vecteurs invariants à gauche ξ et η engendrent un champ de plans H . La distance de Carnot $d(x, x')$ est l'inf des longueurs des courbes tangentes à H joignant x à x' . L'homothétie δ_t est l'automorphisme induit par $\delta_t(\xi) = t\xi$, $\delta_t(\eta) = t\eta$, $\delta_t(\zeta) = t^2\zeta$. Elle multiplie les distances de Carnot par t .

La finitude de la distance de Carnot résulte de la figure suivante.



Remarque

1. $d(x, x \exp(t^2\zeta)) = td(1, \exp(\zeta)) = \text{const. } t$.
2. $\text{volume}B(x, t) = t^4 \text{volume}B(x, 1) = \text{const. } t^4$, donc la dimension de Hausdorff est 4.

Non plongeabilité du groupe de Heisenberg dans les espaces de Banach RNP

1. *Une application lipschitzienne possède des dérivées partielles horizontales presque partout.*
Par définition de la propriété de Radon-Nikodym.
2. *Ces dérivées sont approximativement continues presque partout.*
C'est général pour les espaces doublants.
3. *En un tel point x , $d(f(x), f(x')) = o(d(x, x'))$ si x' est sur la droite verticale passant par x .*

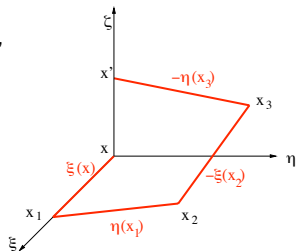
Soit $x' = x \exp(t^2 \zeta)$, de sorte que $d(x, x') \sim t$. On joint x à x' par des courbes intégrales de ξ , η , $-\xi$, $-\eta$, d'extrémités $x = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = x'$. Alors

$$f(x_1) - f(x) \sim t\xi f(x), \quad f(x_3) - f(x_2) \sim -t\xi f(x),$$

d'où

$$f(x_1) - f(x) + f(x_3) - f(x_2) = o(t).$$

De même $f(x_2) - f(x_1) + f(x') - f(x_3) = o(t)$. En additionnant, $f(x') - f(x) = o(t)$.



Remarque

L^1 n'a pas la propriété de Radon-Nikodym.

En effet, $t \mapsto \mathbf{1}_{[0,t]}$, $\mathbb{R}_+ \rightarrow L^1(\mathbb{R}_+)$, est isométrique, mais nulle part différentiable.

Schema de la preuve

de la non plongeabilité dans L^1 .

1. A une application $f : X \rightarrow L^1(Y, \nu)$, on associe une famille canonique de sous-ensembles $S \subset X$, généralisant les ensembles de niveau.
2. f est à variation bornée si et seulement si presque tout S est de périmètre fini.
3. (Franchi, Serapioni, Serra-Cassano, 2001). Si $S \subset \mathbb{H}$ est de périmètre fini, alors, en presque tout point, les dilatés par δ_t de S convergent vers des demi-espaces verticaux.
4. Au voisinage des bons points, à petite échelle, f factorise approximativement par $\mathbb{H}/[\mathbb{H}, \mathbb{H}]$, ce qui l'empêche d'être bilipschitzienne.