

Dérivation de KPZ à partir de RSOS d'après Park et Kahng, PRE 1995

Stéphane Cordier

M.A.P.MO. UMR CNRS 6628 - Université d'Orléans.

<mailto:Stephane.Cordier@math.cnrs.fr>

Dérivation d'une équation de type Langevin

On part d'une équation "maitresse"

$$\partial_t P(H, t) = \sum_{H'} W(H', H) P(H', t) - \sum_{H'} W(H, H') P(H, t),$$

avec $H = (h_i)$ une configuration des hauteurs discrètes ($h_i \in a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$). W est la "section efficace" du passage de H à H' . On définit les moments de W par

$$K_i^{(1)} = \sum_H (h'_i - h_i) W(H', H),$$

$$K_{i,j}^{(2)} = \sum_H (h'_i - h_i)(h'_j - h_j) W(H', H).$$

Développement formel

On obtient **formellement** (développement de Kramers-Moyal) une équation de type Fokker-Planck

$$\frac{\partial P(H, t)}{\partial t} + \frac{\partial (K_i^{(1)} P(H, t))}{\partial h_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (K_{i,j}^{(2)} P(H, t))}{\partial h_i \partial h_j} + \dots = 0,$$

qui est associé à la dynamique de Langevin suivante

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = K_i^{(1)} + \eta_i,$$

avec

$$\langle \eta_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = K_{i,j}^{(2)} \delta(t - t').$$

Choix de W pour le modèle RSOS

Le processus de dépôt consiste à choisir un site i et d'augmenter h_i d'une unité a **si la différence avec les voisins est inférieure à 1** :

$$W(H, H') = \frac{1}{\tau} \sum_i \Theta(h_{i+1} - h_i) \Theta(h_{i-1} - h_i) \delta(h'_i, h_i + a) \prod_{j \neq i} \delta(h'_j, h_j)$$

avec τ le temps de dépôt et

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calcul des 2 premiers moments pour RSOS

$$K_i^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_H (h'_i - h_i) W(H', H) = \frac{a}{\tau} \Theta(h_{i+1} - h_i) \Theta(h_{i-1} - h_i),$$

$$K_{i,j}^{(2)} = \frac{a^2}{\tau} \Theta(h_{i+1} - h_i) \Theta(h_{i-1} - h_i) \delta_{ij}.$$

On "régularise" la fonction de Heaviside

$$\Theta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 + \tanh(nx)),$$

$$\Theta(\Delta h) \approx \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\Delta h)^k \right).$$

Passage au continu

$$K_i^{(1)} \approx \frac{a}{\tau} (1 + A_1(h_{i-1} - h_i) + A_2(h_{i-1} - h_i)^2 + \dots) \\ \times (1 + A_1(h_{i+1} - h_i) + A_2(h_{i+1} - h_i)^2 + \dots),$$

On développe et on considère que $h_i(t)$ est la valeur d'une fonction $h(x, t)$ en $x = ia$:

$$K^{(1)}(x) \approx \frac{a}{\tau} (1 + A_1 a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + (2A_2 - A_1) a^2 (\frac{\partial h}{\partial x})^2) + O(a^4).$$

De même

$$K^{(2)}(x, x') = \frac{a^2}{\tau} \delta(x - x') + O(a^4).$$

KPZ

En remplaçant $K^{(1)}$ et $K^{(2)}$ dans l'équation de Langevin ($\frac{\partial h_i}{\partial t} = K_i^{(1)} + \eta_i$) avec $A_1 > 0$ et $A_2 = 0$ (cf. tanh), on obtient l'EDP stochastique

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \lambda (\nabla h)^2 + F + \eta(x, t),$$

avec

$$\nu = A_1 a^3 / \tau, \quad \lambda = -A_1^2 a^3 / \tau, \quad F = a / \tau.$$

et le bruit est tel que

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \frac{a^2}{\tau} \delta(x - x') \delta(t - t').$$

In summary, we have exactly derived the continuous KPZ equation from a stochastic model the restricted solid-on-solid (RSOS) model, by constructing the master equation, by changing it into the Langevin equation using the Fokker-Planck formalism.

The regularization process from discrete quantities to the continuous ones has been clearly explained in the RSOS model which is due to the restriction of the height difference between the nearest neighbor columns.

Conclusions

Trois directions de travaux

- Comprendre l'origine de KPZ ou de modèles connexes à partir de processus microscopique plus réalistes (ombrage ?)
- Analyse de l'équation différentielle stochastique (existence, unicité, régularité)
- Trouver des méthodes numériques efficaces