(11)

$$\left(\int_0^t e^{A(t-\sigma)} dW(\sigma) = \int_0^t e^{A(t-\sigma)} d \sum \beta_k e_k \ . \right)$$

$$I_2 = \mathbb{E}\left(\left| \sum_k \int_0^s - dB_k + \int_s^t e^{-k^2(t-\sigma)} dB_k(s) \ e_k(\xi) \right|^2 \right)$$

$$I_{21} = \mathbb{E}\left(\left| \sum_k \int_0^s \left(e^{-k^2(t-\sigma)} - e^{-k^2(s-\sigma)} \right) dB_k(\sigma) e_k(\xi) \right|^2 \right)$$

$$= \sum_k \int_0^s \left(e^{-k^2(t-\sigma)} - e^{-k^2(s-\sigma)} \right)^2 d\sigma \ e_k^2(\xi)$$

$$\leq c \sum_k \left(1 - e^{-k^2(t-s)} \right)^2 \int_0^t e^{-2k^2(t-\sigma)} d\sigma$$

$$\leq c \sum_k \frac{1}{k^2} k^{4\gamma} (t-s)^{2\gamma} \leq C_\gamma |t-s|^{2\gamma} .$$

$$|1 - e^{-x}| \leq 2^{1-\alpha} x^\alpha \qquad \forall \gamma \ \ 2-4\gamma > 1 \Longrightarrow \gamma < \frac{1}{4}$$

idem pour $I_{22} = \int_s^t \dots$ exercice

d'où $\mathbb{E}\left(|z(t,\xi_1) - z(s,\xi_2)|^2 \right) \leq c \left(|t-s|^{2\gamma} + |\xi_1 - \xi_2|^\beta \right)$

si $\gamma < \frac{1}{4}$

donc d'après le critère de Kolmogorov (prop 1) $\beta < 1$.

on a $Z \in \mathcal{C}_{t,\xi}^{1/4-\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon}$

3.2 eq. non linéaire

$$Y = X - Z$$

$$\frac{dY}{dt} = AY + F(Y+Z) \qquad (3.2)$$

$$Y(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)} F(Y+Z)\,ds.$$

ω fixé $\mathcal{C}([0,T]; L^2)$. $\qquad Z(0) = x$.

avec $F(x) = \partial_\xi(x^2) \quad A = \partial_{\xi\xi}$

on veut estimer. $\left|e^{A(t-s)}\partial_\xi (Y+Z)^2\right|_{L^2}$

$(Y+Z)^2$ est dans L^1

on a donc $|Y(t)|_{L^2} \leq |x|_{L^2} + \int_0^t \left\|e^{A(t-s)}\partial_\xi\right\|_{L^1 \to L^2} (Y+Z)^2_{L^2}\,ds$

$(t-s)^{-3/4} \leftarrow$ (norme de l'opérateur L^1 dans L^2)

d'où

$$\sup_{t\in[0,T]} |Y(t)|_{L^2} \leq |x|_{L^2} + cT^{1/4} \sup_t \left(|Y|^2 + |Z|^2\right)$$

donc $\exists! \; \mathcal{C}([0,T], \omega, x), L^2)$

globalité si estimation a priori.

(ω fixé) $\quad \dfrac{d|Y|^2}{dt} + |\partial_\xi Y|^2 = \int \partial_\xi (Y+Z)^2 \; Y d_\xi$

$$= -\int (Y+Z)^2 \partial_\xi Y \, d\xi$$

$$= -\int (2YZ + Z^2)\,\partial_\xi Y\, d\xi$$

$$\frac{d|Y|^2}{dt} + |\partial_\xi Y|^2 \leq c\left(|z|_{L^4}^{8/3}\, |Y|_{L^2}^2 + |z|_{L^4}^4 + \frac{1}{2}|\partial_\xi Y|^2\right)$$

$$|X(t,x)|^2 \leq C \exp\left(c\int_0^t |z|_{L^4}^{8/3} ds\right) \times \left(|x|_{L^2}^2 + |z|_{L^4}^4\right)$$

<u>Remarque</u> il n'est pas evident à ce niveau que X a un moment car il faut prendre les moments d'une variable gaussienne. on sait qu'il y a des moments d'ordre 2 mais $8/3 > 2$. (?)

en fait, on peut montrer que

$$X \in L^2(\Omega, \mathcal{C}(0,T); L^2)$$

on peut prendre x $\mathcal{F}_0$ mesurable $\mathcal{L}(X(t,x)) = \nu_{t,x}$

$$\varphi \in \mathcal{C}_b(H) \quad \mathbb{E}\left[\varphi(X(t,x))\right] = \int_H \varphi(y)\, \nu_{t,x}(dy)$$

si $\tilde{X}$ solution de $d\tilde{X} = (A\tilde{X} + F(\tilde{X}))dt + d\tilde{W}$

egalité en loi : $\mathcal{L}(\tilde{X}) = \mathcal{L}(X)$

Remarque

- on peut ajouter un bruit additif
  (il faut juste vérifier que Z reste dans l'espace).
- on peut aussi traiter
  $$dX = (AX + F(X)dt) + \sigma(X)\, dW.$$
  on ajoute une dépendance en X.

  où $(\sigma(X) f)(\xi) \overset{def}{=} \sigma(X(\xi)) f(\xi)$. avec $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lip. bornée

c'est bcp plus technique – 10 H de cours de M2 (calcul stochastique "hard").

- si on considère $dX = (AX + \partial_\xi X^3)\, dt + dW$
  on ne sait rien dire.

$\checkmark$ mesure invariante sur H

si $\mathcal{L}(x) = \mu$
alors $\mathcal{L}(X(t,x)) = \mu$.

III^e séance

(4) Solutions martingales

$$\begin{cases} dX = (AX + g(X))\,dt + dW \\ X(0) = x \end{cases}$$

$$g(X)(\xi) = \partial_\xi (f(X(\xi))) \quad f \text{ borné . (plus nec}^t \text{ lipschitz)}$$

"méthode de compacité" - (cas réel Navier-Stokes stochastique)

Ici cas d'école

approximations galerkin P_m - proj sur les m premiers vecteurs propres du laplacien

$$\begin{cases} dX_m = AX_m + P_m\, g_m(X_m) + P_m\, dW . \\ X_m(x) = P_m(x). \end{cases}$$

estimations sur X_m $\qquad Z_m = P_m Z$

$$Y_m = X_m - Z_m .$$

$$\begin{cases} \dfrac{dY_m}{dt} = AY_m + P_m\, g(Y_m + Z_m) \\ Y_m(0) = P_m x . \end{cases}$$

$$|Y_m(t)|_{L^2}^2 + \int_0^t |\partial_\xi Y_m|^2 ds \leq C + |P_m x|^2 .$$

- Y_m borné $\begin{cases} L^2(\Omega; L^\infty(0,T; L^2)) \\ L^2(\Omega; L^2(0,T; H_0^1)) \end{cases}$

- Z_m borné $C^{\alpha,\gamma}_{t,\xi}$

$X_m + Z_m$ possède de la "compacité spatiale".

$$\frac{dY_m}{dt} = A Y_m + P_m g(\ \ ) \in L^2(\Omega; L^2(0,T; H^{-1}))$$

mais pas de compacité en ω.

en loi : $\mathcal{L}(X_m)$ dans $L^2(0,T;L^2)$

$(\nu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ mesure de proba sur E
est tendue ssi $\forall \delta>0\ \exists K_\delta \Subset E$
$$\nu_\varepsilon(K_\delta) \geq 1-\delta.$$

$$\Longleftrightarrow \exists\ \nu_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \nu \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_B(E)$$

$$\int \varphi\, d\nu_{\varepsilon_k} \to \int \varphi\, d\nu.$$

soit $\mathcal{E} \overset{\text{inj. compact}}{\Subset} L^2(L^2)$ (p.ex. H_0^1)

$$\mathbb{P}(\underbrace{\|X_m\|_{\mathcal{E}} \geq M}_{\overset{\text{def}}{=} K_M^c}) \leq \frac{C}{M^p} \quad (*)$$

$K_M = \{ y \in \mathcal{E} / \|y\|_{\mathcal{E}} \leq M \}$ boule de $\mathcal{E}$ donc compact L^2

on suppose qu'il y a une estimation a priori du type

$$\mathbb{E}(\|X_m\|^p_{\mathcal{E}}) \leq C$$

(alors on a (*)) grâce à la propriété de Markov

$$\mathbb{P}(|X| > M) \leq \frac{1}{M^p} \mathbb{E}(|X|^p)$$

alors $\mathcal{L}(X_m)(K_m) \geq 1 - \frac{c}{M^p}$.

et $\mathcal{L}(X_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} U \qquad L^2(0,T;L^2)$

Thm « la conv en loi $\Rightarrow$ conv p.s. en changeant l'espace de probabilité »
SKOHOROD

$\exists (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}) \quad \exists \tilde{X}_m \,/\, \tilde{X}$ v.a. à valeurs dans $L^2(L^2)$

$$\mathcal{L}(\tilde{X}_{m_k}) = \mathcal{L}(X_{m_k})$$

t.q. $\tilde{X}_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \tilde{X}$ p.s.

$$\tilde{X}_{m_k}(t) - P_{m_k} x - \int_0^t A \tilde{X}_{m_k}(s) + g_{m_k}(\tilde{X}_{m_k}(s))\, ds \overset{def}{=} \tilde{M}_{m_k}(t)$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} \tilde{X}(t) - x - \int_0^t A\tilde{X} + g(\tilde{X})\, ds \quad \text{p.s.}$$

$\overset{def}{=} \tilde{M}(t)$

$\tilde{M}_{m_k}(t)$ est un processus gaussien.

donc $\tilde{M}(t)$ est gaussien (comme limite p.s.).

alors $\tilde{\mathbb{E}}((\tilde{M}_{m_k}, h)^2) = \mathbb{E}((M_{m_k}, h)^2) = t\,|P_m h|^2$

$M_{m_k} = P_{m_k} W$.

$$\tilde{\mathbb{E}}((\tilde{M}(t), h)^2) = t\,|h|^2$$

donc $\Rightarrow \tilde{M} = \tilde{W}$ est un proc. de Wiener cylindrique

$\exists \tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}, \tilde{W} / \exists \tilde{X}$.

$$d\tilde{X} = (A\tilde{X} + g(\tilde{X}))dt + dW$$

$$u : [0,T] \times H \to \mathbb{R}$$

$$d\tilde{u}(\tilde{X}(t),t) = \left(+\frac{d\tilde{u}}{dt}(\tilde{X}(t),t) + \left(\tilde{u}_x(\,), A\tilde{X} + g(\tilde{X})\right)\right)dt$$
$$+ \frac{1}{2} Tr\, \tilde{u}_{xx}(\tilde{X}(t),t)\, dt + (\tilde{u}_x, d\tilde{W})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} T_r (u_{xx}) + (Ax + g(x), u_x) \\ u(0) = \varphi \in \mathcal{C}_b(H). \end{cases}$$

$$du(\tilde{X}(t), T-t) = \left(-\frac{du}{dt} + (u_x, A\tilde{X} + g(\tilde{X})) + \frac{1}{2} Tr(u_{xx})\right)$$

Intégrale de Itô

$$\varphi(\tilde{X}(T)) - u(T,x) = \underbrace{\int_0^T (u_x(\,), dW)}_{\mathbb{E}=0}$$

$$\Rightarrow \quad u(T,x) = \mathbb{E}(\varphi(\tilde{X}(T))).$$

il y a unicité en Loi sous la seule hyp. de continuité.

si $g \equiv 0$. $\quad u = \mathbb{E}(\varphi(\tilde{Z}(t,x))$

dans le cas de Kp2, il faut ajouter

$$Tr(\underset{\shortparallel \atop A}{BB^*} u_{xx}).$$

eq de Kolmogorov - ou Feynman - Kac
(on revient en dim finie)

$$dX = f(x)dt + \sigma(X)\,d\beta$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^* u_{xx}\right) + \left(f(x), u_x\right)$$

$$\frac{dv}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\sigma\sigma^* v\right)_{xx} - \mathrm{div}\,(fv)$$

<u>Mesure invariante</u>

il faut pouvoir définir X^2 pour $X \in H^{-1/2-\varepsilon}$

<u>Notons</u>. $Lu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\overset{BB^*}{\checkmark} u_{xx}\right) + \left(Ax + g(x), u_x\right)$

on veut résoudre $\frac{du}{dt} = Lu$.

$$u(t) = P_t\varphi = e^{Lt}\varphi. \qquad (\text{formel}^{t})$$

$$\mathcal{L}(X(t)) = u = \mathcal{L}(x_0)$$

$$\mathbb{E}\left(\varphi(X(t))\right) = \int_H \varphi(y)\,\mathcal{L}(X(t))\,dy = \int_H \varphi(y)\,d\mu(y).$$

$$\int P_t\varphi(x)\,d\mu = \int e^{Lt}\varphi(x)\,d\mu.$$

$$\int L\varphi\,d\nu = 0 \quad \forall\varphi. \qquad \text{à } t=0 \ \underline{\text{loi} = \nu}.$$

$$\int \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A u_{xx} + (Ax, u_x) + (F(x), u_x) \; \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx$$

KPZ

Formelle (pas de sens en dim ∞)

$$\int \sum \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \; e^{-\frac{x_k^2}{2}}$$

Ai $= -\left(\lambda_k \frac{\partial u}{\partial x_k}, x_k\right) e^{-}$

$= -(Au_x, x)$ qui s'annule avec le 2^{eme} terme car A est auto-adjoint.

$\operatorname{div.} F + (F(x), x)$

$= 0$ (calcul compliqué)

$(F(x), x) = (\partial_\xi(x^2), x) = \int \partial_\xi (x^3) = 0$

$$\int Lu \; d\gamma = 0 \quad \forall u$$

on ne