Modèle d'Eden, modèle de Richardson et percolation de premier passage

Olivier Garet

6 mars 2006

Notations : $\mathbb{L}^d$ est le graphe dont l'ensemble des sites est $\mathbb{Z}^d$, et où deux points x et y forment une arête si ils sont distants de 1 pour la norme 1.

Pour $B \subset \mathbb{Z}^d$, on note ∂B l'ensemble des arêtes qui relient un point de B à un point de $\mathbb{Z}^d \backslash B$. De même on note $\partial^s B$ l'ensemble des points de $\mathbb{Z}^d \backslash B$ qui sont voisins d'au moins un point de B.

1 Modèle d'Eden

Ce modèle est introduit par Murray Eden en 1961 [2].

On appelle modèle d'Eden par arête le processus stochastique décrit comme suit :

- X_0 est l'ensemble réduit au singleton $\{0\}$
- X_{n+1} s'obtient à partir de X_n comme suit : on choisit une arête dans ∂X_n de manière uniforme, et on définit X_{n+1} comme étant composé des points appartenant à X_n ou à l'arête choisi.
- Tous les choix sont faits de manière indépendante.

Variante : on appelle modèle d'Eden par site le processus stochastique décrit comme suit :

- X_0 est l'ensemble réduit au singleton $\{0\}$
- X_{n+1} s'obtient à partir de X_n comme suit : on choisit un site dans $\partial^s X_n$ de manière uniforme, et on définit X_{n+1} comme étant la réunion de X_n et du site choisi.
- Tous les choix sont faits de manière indépendante.

Il est facile de voir que le modèle d'Eden est un processus de Markov (homogène) à temps discret.

Eden définit en fait uniquement le modèle en dimension deux. Il pose la question de savoir si, convenablement réalisé, B_n admet une forme asymptotique, et si c'est la boule euclidienne, comme le laissent penser les simulations qu'il produit.

Remarque : Quand on parle du Modèle d'Eden, c'est plutôt le modèle par arête si l'auteur est mathématicien, plutôt le modèle par site si l'auteur est physicien.

2 Percolation de premier passage

La percolation de premier passage a été introduite par Hammersley and Welsh [3] en 1965 comme un modèle de propagation d'un fluide dans un média poreux. À chaque arête du graphe $\mathbb{Z}^d$, on associe une variable aléatoire positive qui représente le temps nécessaire pour traverser l'arête. Dans le cas le plus classique, on suppose que les temps de passages sont indépendants, distribués suivant une même loi ν admettant un moment d'ordre deux.[1] On peut alors définir le temps nécessaire pour suivre un chemin : c'est la somme des temps des arêtes qui le composent. On peut alors parler de temps minimal pour aller d'un point x à un point y : c'est la borne inférieure des temps des chemins qui vont de x à y.

Ainsi, cette famille de temps de passage induit une distance (aléatoire) $d(.,.)$ sur $\mathbb{Z}^d$ qui peut asymptotiquement être comparée à la distance usuelle : pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, la suite $d(0,nx)/n$ admet une limite presque sûre $\mu(x)$. La preuve de ce résultat repose essentiellement sur le théorème ergodique sous-additif, dont la première version est justement donnée dans Hammersley et Welsh [3].

La fonctionnelle $x \mapsto \mu(x)$ se prolonge sur $\mathbb{R}^d$ en une semi-norme. Lorsque $\nu(0) < p_c(\mathbb{Z}^d)$, alors cette semi-norme est en fait une norme et on a en plus un théorème de forme asymptotique : si l'on note

$$B_t = \{x \in \mathbb{Z}^d; d(0,x) \le t\},$$

l'ensemble des points qui sont à une distance au plus t de l'origine, alors l'ensemble renormalisé B_t/t converge presque sûrement vers la boule unité associée à μ. Ce r'ésultat de forme asymptotique est dû à Cox et Durrett [1]), une forme plus faible (convergence en probabilité) avait été obtenue peu avant par Schürger [7].

Remarque : on parle ici de percolation de premier passage par arêtes. Il est possible de faire de manière assez similaire de la percolation de premier passage par site, en mettant les variables aléatoires sur les sites.

3 Le modèle de Richardson

Il s'agit d'une extension du modèle d'Eden en temps continu. On peut le définir comme suit : on prend une famille $(t_e^n)_{e\in\mathbb{E}^d;n\ge 0}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi expontielle de paramètre λ. On définit d'abord conjointement un modèle d'Eden (X_n) et une suite de temps (T_n) comme suit :

- X_0 est l'ensemble réduit au singleton $\{0\}$ et $T_0 = 0$
- X_{n+1} et T_{n+1} s'obtient à partir de X_n et T_n comme suit : on note g l'arête qui réalise le minimum des t_e^n, où e décrit ∂X_n (En cas d'égalité les départager par l'ordre lexicographique). On définit X_{n+1} comme étant composé des points appartenant à X_n ou à g et $T_{n+1} = T_n + t_g^n$.

[1] On peut grandement affaiblir cette hypothèse, mais ce n'est pas notre propos ici.

Le processus de Richardson $(R_t)_{t\geq 0}$ est définit par $R_t = X_n$ si $T_n \leq t < T_{n+1}$.

Il est possible de démontrer que $(R_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov (homogène) en temps continu.

$(R_t)_{t\geq 0}$ peut être décrit comme un système de particules en interaction locale, ce qui permet de donner une description microscopique du comportement du système, contrairement à ce qui se passait dans le modèle d'Eden.

Dans son article, Richardson [6] montre, pour une certaine classe de processus stochastiques modélisant des phénomènes de croissance, le résultat de forme asymptotique : B_t/t converge en probabilité vers un convexe compact. Richardson remarque que le modèle d'Eden peut se ramener à l'étude d'un modèle de cette classe. Notons que bien que Richardson utilise les méthodes de sousadditivité développées par Hammersley et Welsh [3], le lien entre le modèle de Richardson et la percolation de premier-passage n'est pas fait de manière explicite, puisque le terme « percolation de premier passage »n'apparaît pas chez Richardson. Cependant, Cox et Durrett [1] considèrent que Richardson a été le premier a voir le lien entre le modèle d'Eden et la percolation de premier passage, ce point de vue étant unanimement repris par la suite, par exemple par Kesten [4, 5]. De nos jours, l'équivalence entre Eden/Richardson et la percolation de premier passage est considérée comme une évidence bien qu'on n'en trouve pas de preuve formelle dans la littérature. C'est l'objet de la prochaine section.

4 Percolation de premier passage et Eden/Richardson

On établit ici le lien entre le modèle d'Eden (par arêtes) et la percolation de premier passage (par arête). On procéderait de manière analogue pour les modèles par site.

Théorème 4.1. *On pose* $T_k = \inf\{t \geq 0; |B_t| \geq k\}$ *et* $B'_k = B_{T_k}$

Si les temps de passage $(t_e)_{e\in\mathbb{L}^d}$ *suivent des lois exponentielles indépendantes suivant le paramètre* $\lambda > 0$*, Alors* $(B_k)_{k\geq 0}$ *est un processus d'Eden.*

Démonstration. Petite remarque : l'événement

$$\cup_{e,f\in\mathbb{L}^d;e\neq f}\{t_e = t_f\}$$

est de probabilité nulle (par exemple parce que $t_e - t_f$ est une variable aléatoire à densité). Quitte à changer d'espace de probabilité, on peut donc supposer que deux arêtes n'ont jamais le même temps de passage.

Définissons la suite $(t^n_e)_{e\in\mathbb{E}^d;n\geq 0}$ par $t^0 = t$, puis

$$t^{n+1}_e = \begin{cases} t^n_e - \inf\{t_f; f \in \partial B_n\} & \text{si } e \in \{f \in \partial B_n; t_f > \inf\{t_f; f \in \partial B_n\}\} \\ |\partial B_n| t^n_e & \text{si } e \in \{f \in \partial B_n; t_f = \inf\{t_f; f \in \partial B_n\}\} \\ t^n_e & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après l'algorithme de Dijkstra, on peut voir que $B_{n+1} = F(B_n, t^{n+1})$, où

$$F(B,t) = B \cup \{x \in \mathbb{Z}^d \backslash B; \exists y \in B; e = (x,y) \text{ et } t_e = \inf\{t_f; f \in \partial B\}$$

On va montrer que pour tout entier naturel n, et pour toute suite croissante d'ensembles $b'_0, b'_1, \dots b'_n$ avec $b'_0 = \{0\}$ et pour tout i $b'_{i+1} \backslash b'_i$ est un élément de $\partial b'_i$, alors la loi de $(t^n_e)_{e \in \partial b'_n}$ sachant $\{B'_0 = b'_0, B'_1 = b'_1, \dots B'_n = b'_n\}$ est $\mathcal{E}(\lambda)^{\otimes b'_n}$

La preuve se fait par récurrence sur n. Pour $n = 0$, c'est évident.

Posons $A = \{B'_0 = b'_0, B'_1 = b'_1, \dots B'_n = b'_n\}$. On note $g = (x, y)$ l'arête reliant le point x de b'_n et le point y de $b'_{n+1} \backslash b'n$. On note H l'ensemble des arêtes de $\partial b'_{n+1}$ qui étaient déjà dans $\partial b'_n$. On note I l'ensemble des arêtes de $\partial b'_{n+1}$ qui n'étaient pas dans $\partial b'_n$ (ce sont des arêtes partant de y). Noter que g n'est pas dans H.

Il s'agit donc de montrer que pour tout $(x_e)_{e \in \partial b'_{n+1}} \in [0, +\infty)^{\partial b'_{n+1}}$, on a

$$P(A \cap \{B'_{n+1} = b'_{n+1}\} \cap \bigcap_{e \in \partial b'_{n+1}} \{t^{n+1}_e \geq x_e\}) = P(A \cap \{B'_{n+1} = b'_{n+1}\}) \exp(-\lambda \sum_{e \in \partial b'_{n+1}} x_e)$$

Mais

$$A \cap \{B'_{n+1} = b'_{n+1}\} \cap \bigcap_{e \in \partial b'_{n+1}} \{t^{n+1}_e \geq x_e\} = A \cap \{B'_{n+1} = b'_{n+1}\} \cap \bigcap_{e \in H} \{t^n_e - t_g \geq x_e\} \cap \bigcap_{e \in I} \{t_e \geq x_e\}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
& P(A \cap \{B'_{n+1} = b'_{n+1}\} \cap \bigcap_{e \in \partial b'_{n+1}} \{t^{n+1}_e \geq x_e\}) \\
= \; & P(A \cap \{B'_{n+1} = b'_{n+1}\} \cap \bigcap_{e \in H} \{t^n_e - t^n_g \geq x_e\}) P(\bigcap_{e \in I} \{t_e \geq x_e\}) \\
= \; & P(A \cap \{B'_{n+1} = b'_{n+1}\} \cap \bigcap_{e \in H} \{t^n_e - t^n_g \geq x_e\}) \exp(-\lambda \sum_{e \in I} x_e)
\end{aligned}$$

En réalité, on a

$$\begin{aligned}
A \cap \{B'_{n+1} = b'_{n+1}\} \cap \bigcap_{e \in H} \{t^n_e - t^n_g \geq x_e\} &= A \cap \bigcap_{e \in H} \{t^n_e > t^n_g\} \cap \bigcap_{e \in H} \{t^n_e - t^n_g \geq x_e\} \\
&= A \cap \bigcap_{e \in H} \{t^n_e - t_g \geq x_e\}
\end{aligned}$$

Ainsi donc, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} P(A \cap \{B'_{n+1} = b'_{n+1}\} \cap \bigcap_{e \in H} \{t^n_e - t^n_g \geq x_e\}) &= P(A)P(\cap \bigcap_{e \in H} \{t_e - t_g \geq x_e\}) \\ &= P(A) \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} P(\bigcap_{e \in H} \{t_e \geq x_e + x\}) \; dx \\ &= P(A) \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \prod_{e \in H} \exp(-\lambda(x + x_e) \; dx \\ &= P(A) \frac{1}{|H| + 1} \exp(-\lambda \sum_{e \in H} x_e) \\ &= P(A) \frac{1}{|\partial b'_n|} \exp(-\lambda \sum_{e \in H} x_e) \end{aligned}$$

En appliquant la formule avec tous les x_e nuls, on récupère

$$P(A \cap \{B'_{n+1} = b'_{n+1}\}) = P(A) \frac{1}{|\partial b'_n|} \tag{1}$$

$$P(A \cap \{B'_{n+1} = b'_{n+1}\} \cap \bigcap_{e \in H} \{t^n_e - t_g \geq x_e\}) = P(A \cap \{B'_{n+1} = b'_{n+1}\}) \exp(-\lambda \sum_{e \in H} x_e),$$

ce qui permet de conclure facilement que l'hypothèse de récurrence est héréditaire.

Comme elle est vraie au rang 0, elle est vraie pour tout n, en particulier cela implique que pour tout n, (1) est vraie ce qui signifie exactement que B'_n est un modèle d'Eden.

□

En prolongeant les raisonnements, on peut montrer que $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Richardson (laissé au lecteur !).

References

[1] J. Theodore Cox and Richard Durrett. Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions. *Ann. Probab.*, 9(4) :583–603, 1981.

[2] Murray Eden. A two-dimensional growth process. In *Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., Vol. IV*, pages 223–239. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1961.

[3] J. M. Hammersley and D. J. A. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Proc. Internat. Res. Semin., Statist. Lab., Univ. California, Berkeley, Calif.*, pages 61–110. Springer-Verlag, New York, 1965.

[4] Harry Kesten. Aspects of first passage percolation. In *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*, volume 1180 of *Lecture Notes in Math.*, pages 125–264. Springer, Berlin, 1986.

[5] Harry Kesten. Percolation theory and first-passage percolation. *Ann. Probab.*, 15(4) :1231–1271, 1987.

[6] Daniel Richardson. Random growth in a tessellation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 74 :515–528, 1973.

[7] Klaus Schürger. On the asymptotic geometrical behaviour of percolation processes. *J. Appl. Probab.*, 17(2) :385–402, 1980.