

Problème **parabolique** :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = F$$

Problème **elliptique** ou stationnaire:

$$-\Delta u = F$$

dans ce cas F est indépendant de t .

Remarques:

- Une solution du problème elliptique est solution du problème parabolique
- À t fixé, une solution du problème parabolique est solution d'un problème elliptique.

- Discrétisation en temps:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} - \Delta u_{n+1} = F$$

à chaque étape u_{n+1} est solution d'un problème elliptique.

- Dans certains cas, si u est une solution du problème parabolique pour tout t , alors $u(., t) \rightarrow \bar{u}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ où \bar{u} est solution du problème elliptique.

Régularité de la solution faible de:

$$\begin{cases} -\mathbf{div}[A(x)Du] = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où A est une matrice coercive bornée. ($\sum a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$)

u est solution faible si,

$$\int_{\Omega} A(x)DuD\Phi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\Phi(x)dx \quad \forall \Phi$$

- Si $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \geq \frac{2N}{N+2}$ alors il y a une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de (1)
- si de plus $m > \frac{N}{2}$ alors $u \in L^\infty(\Omega)$

Remarque : lorsque $N = 2$ la solution est $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dès que $m > 1$.

On va s'intéresser aux problèmes du type:

$$\begin{cases} -\Delta u = C|Du|^2 + f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbf{R}^N .

Dans tous les cas, pour montrer l'existence d'une solution, on pourra distinguer 2 étapes:

- estimations a priori
- existence d'une solution pour un problème approché et passage à la limite.

Rappel: changement de fonction:

Soit u solution (régulière) de,

$$\begin{cases} -\Delta u = C|Du|^2 + f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Soit $v = e^{Cu} - 1$ alors v vérifie,

$$\begin{cases} -\Delta v = C(v + 1)f(x) & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ça marche aussi pour les solutions faibles!

Si $m > \frac{N}{2}$ soit $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ une solution, on prend pour fonction test $Ce^{Cu}\Phi(x)$, on obtient,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} DuDuC^2e^{Cu}\Phi(x)dx + \int_{\Omega} DuD\Phi Ce^{Cu}(x)dx \\ &= \int_{\Omega} C|Du|^2Ce^{Cu}\Phi(x)dx + \int_{\Omega} f(x)Ce^{Cu}\Phi(x)dx \end{aligned}$$

ça marche aussi pour les solutions faibles!

Si $m > \frac{N}{2}$ soit $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ une solution, on prend pour fonction test $Ce^{Cu}\Phi(x)$, on obtient,

$$\begin{aligned} & + \int_{\Omega} Du D\Phi Ce^{Cu}(x) dx \\ = & + \int_{\Omega} f(x) Ce^{Cu}\Phi(x) dx \end{aligned}$$

ça marche aussi pour les solutions faibles!

Si $m > \frac{N}{2}$ soit $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ une solution, on prend pour fonction test $Ce^{Cu}\Phi(x)$, on obtient,

$$\begin{aligned} & + \int_{\Omega} Du D\Phi C e^{Cu}(x) dx \\ = & + \int_{\Omega} f(x) C e^{Cu} \Phi(x) dx \end{aligned}$$

d'où,

$$\int_{\Omega} D(e^{Cu} - 1) D\Phi dx = \int_{\Omega} f(x) C e^{Cu} \Phi(x) dx$$

c.a.d.

$$\int_{\Omega} Dv D\phi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) C(v + 1) \Phi(x) dx$$

pour tout Φ , en posant $v = e^{Cu} - 1$

Ce qui signifie que v est solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta v = C(v + 1)f(x) \text{ dans } \Omega \\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Multiplions cette équation par v , on obtient,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Dv Dv dx &= \int_{\Omega} C v^2 f(x) dx + \int_{\Omega} C v f(x) dx \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_{\Omega} |f|^{(\frac{2^*}{2})'} dx \right)^{1 - \frac{2}{2^*}} \\ &+ C \left(\int_{\Omega} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{\Omega} |f|^{(2^*)'} dx \right)^{1 - \frac{1}{2^*}} \end{aligned}$$

$$\text{or } \left(\frac{2^*}{2} \right)' = \frac{N}{2}$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq C \|v\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 \|f\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} + Cste \|v\|_{L^{2^*}(\Omega)} \|f\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} \\ &\leq Cste \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \|f\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} + Cste \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|f\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} \end{aligned}$$

Donc,

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|f\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} + Cste \|f\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)}$$

On a obtenu une estimation de $\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ si $\|f\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)}$ est assez petite.

Récapitulation:

On a pris comme fonction test $Ce^{Cu}\Phi(x)$, puis $\Phi(x) = v = Ce^{Cu} - 1$. On peut travailler directement sur l'équation de départ en utilisant dès le début les bonnes fonctions tests.

● Pour $m > \frac{N}{2}$ et

$$\begin{cases} -\Delta u = C|Du|^2 + f(x) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On utilise des fonctions tests exponentielles ($e^{\lambda u^2} u$).

● Pour $m < \frac{N}{2}$, $q = \frac{N}{N-2m}$ et

$$\begin{cases} -\Delta u = C|Du|^q + f(x) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On utilise des fonctions tests de la forme $|u|^{\alpha-1}u$ où $\alpha = \frac{N(m-1)}{N-2m}$

Remarque:

on peut remplacer $C|Du|^2 + f$ par $F(x, u, Du)$ tel que $|F(x, u, Du)| \leq C|Du|^2 + f$

Les résultats:

- Pour $m > \frac{N}{2}$ et $-\Delta u = C|\nabla u|^2 + f$
Ferone, Posteraro, Rakotoson (condition de taille sur f)
- Le cas limite $q = 2$, $m = \frac{N}{2}$ et $-\Delta u = C|Du|^2 + f$ a une solution telle que $u \in H_0^1(\Omega)$, $e^{C|u|} - 1 \in H_0^1(\Omega)$ si $\|f\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)}$ est assez petite (Ferone, Murat)
- Lorsque $1 < m < \frac{N}{2}$, $q = \frac{N}{N-m}$, pour $-\Delta u = C|Du|^q + f(x)$ a une solution lorsque $\|f\|_{L^m(\Omega)}$ est assez petite (N.G., Murat, Porretta).
- Lorsque $m = 1$ ou $f = \mu$ mesure de radon bornée, $0 \leq q \leq 1$,

$$-\Delta u = C|Du|^q + \mu$$

(M.F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat, M.M. Porzio). Existence d'une solution renormalisée.

Contre-exemple:

cas critique $m = \frac{N}{2}$, on considère le problème,

$$\begin{cases} \Delta u = C|Du|^q + f(x) \\ u \in H_0^1(\Omega), e^{C|u|} - 1 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

- Si $C\|f\|_{L^m(\Omega)} < \frac{1}{C_N}$ on a une solution.
- $\forall \epsilon > 0$, on peut trouver f, C, Ω tels que $\frac{1}{C_N} < C\|f\|_{L^m(\Omega)} < \frac{1}{C_N} + \epsilon$ pour lesquels le problème ci-dessus n'ait pas de solution.

Mais on a les résultats suivants, pour $\alpha_0 > 0$,

- Pour $m > \frac{N}{2}$ et $-\Delta u + \alpha_0 u = C|\nabla u|^2 + f$
on a existence d'une solution sans condition de taille sur f (Boccardo, Murat, Puel).
- Le cas limite $q = 2$, $m = \frac{N}{2}$ et $-\Delta u + \alpha_0 u = C|Du|^2 + f$ a une solution sans condition de taille sur f et les ouverts peuvent être non bornés (Dall'Aglio, Giachetti, Puel)
- Lorsque $1 < m < \frac{N}{2}$, $q = \frac{N}{N-m}$, pour $-\Delta u + \alpha_0 u = C|Du|^q + f(x)$ a une solution sans condition de taille sur f (N.G., Murat, Porretta).

Si $f \in L^2(0, T, L^q(\Omega))$ avec $q > \frac{2N}{N+2}$ alors le problème,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) \text{ dans }]0, T[\times \Omega \\ u(x, 0) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[\end{cases}$$

admet une solution $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega))$.

Si de plus, $f \in L^r(0, T, L^q(\Omega))$ avec $\frac{q}{r'} > \frac{N}{2}$ alors $u \in L^\infty(]0, T[\times \Omega)$.

Remarque:

● $r = +\infty \rightarrow q > \frac{N}{2}$

● $r = 2 \rightarrow q > N$

Dall'Aglio, Giachetti, Puel

Si $f(x, t) \in L^r(0, T, L^q(\Omega))$ avec $\frac{q}{r'} > \frac{N}{2}$ et si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ alors il existe au moins une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = C|Du|^2 + f(x, t) & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\end{cases}$$

telle que $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(]0, T[\times \Omega)$.

Remarques:

- Ils traitent aussi le cas critique $\frac{q}{r'} = \frac{N}{2}$
- généralisation à des ouverts non bornés
- pas de condition de taille sur f .

mais

Soit $\mu > 0$ et $v(x, t) = e^{-\mu t}u(x, t)$, alors si u vérifie,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = C|Du|^2 + f(x, t)$$

v vérifie,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + \mu v = Ce^{-\mu t}|Du|^2 + e^{-\mu t}f(x, t)$$

Blanchard, Porretta

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u)|Du|^2 = f(x, t) \text{ dans }]0, T[\times \Omega \\ u(x, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega \\ u(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[\end{cases}$$

avec la condition $sg(s) \geq 0$

- Si $\int_0^{+\infty} g(s)ds < +\infty$, $f \in L^1(\Omega \times]0, T[)$ $f \geq 0$ $u_0 \in M_0^+(\Omega)$, alors il existe une solution renormalisée.
- Si $\int_0^{+\infty} g(s)ds = +\infty$, $f \in L^1(\Omega \times]0, T[)$ $f \geq 0$ $u_0 \in M_0^+(\Omega)$, alors il existe une solution renormalisée **ssi** $u_0 \in L^1(\Omega)$

Ces solutions renormalisées sont telles que $g(u)|Du|^2 \in L^1(\Omega \times]0, T[)$,

$u \in L^\infty(0, T, L^1(\Omega)) \cap L^q(0, T, W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout $q < \frac{N+2}{N+1}$

Ben-Artzi, Souplet, Weissler (spécifique Δ)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = C|Du|^q & x \in \mathbf{R}^N \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases}$$

où $u_0 \in L^p(\mathbf{R}^N)$ et $q \geq 1$.

- Si $q < 2$ et $p \geq \frac{N(q-1)}{2-q}$ existence et unicité sans condition de signe sur C ni sur u_0
- Si $q \geq 2$, $C > 0$, $u_0 \geq 0$ non existence $\forall p$.
- Si $C < 0$ et $u_0 \geq 0$ existence pour $p \geq 1$, et non existence pour u_0 mesure et $q > \frac{N+2}{N+1}$.

Remarque $\frac{N(q-1)}{2-q} \geq 1$ ssi $q \geq \frac{N+2}{N+1}$

Résultats spécifiques Δ (thèse Dabuleanu 2005)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = C|Du|^q \text{ dans }]0, T[\times \Omega \\ u(x, 0) = \mu_0 \text{ dans } \Omega \\ u(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[\end{cases}$$

On appellera solution une fonction $u \in C(]0, T[, L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T, W^{1,1}(\Omega))$ telle que $|Du|^p \in L^1(Q_T)$ pour tout $T > 0$ qui vérifie,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = C|Du|^q \text{ dans } D'(Q_T) \\ u(t) \rightharpoonup \mu_0 \text{ faiblement dans } M_b(\Omega) \text{ lorsque } t \rightarrow 0 \end{cases}$$

Elle fait une étude systématique pour $q > 0$ et μ_0 mesure ou $L^p(\Omega)$, par exemple

- Si $0 < q < 1$, $\mu_0 \in M_b(\Omega)$ pas de condition de signe sur C , existence d'une solution
- Si $1 \leq q < \frac{N+2}{N+1}$, $\mu_0 \in M_b(\Omega)$, solution unique sans condition de signe sur C .
- Si $C < 0$, $q \geq \frac{N+2}{N+1}$ pas de solution avec condition initiale Dirac.