I Introduction.

(1) $u_t = \Delta u + |Du|^2$ K.P.Z déterminité.

Conditions initiales et ouvert à préciser.

pour $|Du|^p$ $(p \geq 1)$ = 30 articles !

(2) $u_t = \Delta u + |Du|^p$ $p \geq 1$.

Présentation des techniques propre à cette eq en vue de pouvoir dire des choses pour :

(3) $u_t = \Delta u + |Du|^2 + 2$.

II Etude de l'eq (1).

Différents domaine peuvent être choisi.

a) $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ $(N \geq 1)$

$(t, x) \longmapsto u(t, x)$

b) $u : \mathbb{R}^+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ω domaine fermé de $\mathbb{R}^N$.

c) u périodique en $x \in \mathbb{R}^N$.

Th 1 : Soit $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$ alors il existe $T > 0$ et une unique fonction $u \in C^{1,2}(]0,T] \times \mathbb{R}^N) \cap C_b^0([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ telle que :

$$(4) \begin{cases} u_t = \Delta u + |\nabla u|^2 & \text{dans }]0,T] \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Pr : Chg^t de Hopf-Cole.

$v = e^u \qquad u = \ln v$

$u_t = \dfrac{v_t}{v} \qquad \nabla u = \dfrac{\nabla v}{v} \qquad \Delta u = \dfrac{\Delta v}{v} - \dfrac{|\nabla v|^2}{v^2}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{v_t}{v} = \frac{\Delta v}{v} - \frac{|\nabla v|^2}{v^2} + \frac{|\nabla v|^2}{v^2}$$

Rq : On voit ici que si $p \neq 2$ alors les termes ne s'annulent plus.

$(1) \Leftrightarrow v_t = \Delta v$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} v_t = \Delta v & \text{dans }]0,T] \times \mathbb{R}^N \\ v(0,x) = e^{u_0(x)} & \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

eq de la chaleur et la sol est explicite :

$$v(t,x) = \left(G(t,\cdot) * e^{u_0(\cdot)}\right)(x)$$

où $G(t,y) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$ $\mathcal{C}^\infty$ en y

d'où

$$u(t,x) = \ln\left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{u_0(y)} G(t, x-y)\,dy\right)$$

défini $\forall t \geq 0$. et $\mathcal{C}^\infty$ en y.

. L'unicité découle de l'unicité de la solution de l'éq de la chaleur.

Remarques : 1) Comme $u = \ln(\text{—}\quad)$ a priori u peut changer de signe.

Q : A-t-on un principe de maximum ?

Rép : oui car si u_1 et u_2 sont 2 sol de (4) avec $u_1(0,x) \geq u_2(0,x)$ $x \in \mathbb{R}^N$ alors $v_i = e^{u_i}$ $(i=1,2)$ sont sol de l'éq de la chaleur qui possède un principe de maximum. D'où si $u_0 \geq 0$ alors $u \geq 0$.

2) On a pris $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$.

Q : Peut-on affaiblir cette hypothèse ?

Exemple:

$$u_0(x) = -N \ln(|x|)\, \mathbb{1}_{\{|x|<1\}} \quad , N \geq 2.$$

u_0 n'est pas bornée.

$u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

et $e^{u_0} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$

$$\left(\int_{B_R} e^{u_0(x)} dx = \int_0^R \frac{r^{N-1}}{r^N} dr = +\infty. \right)$$

$(R<1)$

Donc on ne peut pas définir $G(t,\cdot) * e^{u_0(\cdot)}$!!

Voir pour des résultats de non existence dans L^q dans le cas $(p \geq 2)$ les travaux de:

$\boxed{\text{Ben-Artzi ; Souplet , Weissler.}}$

III) Etude de l'eq (2) : $p>1$.

Th 2 : (L. Amour, M. Ben-Artzi) (98)

Soit $u_0 \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$, alors il existe une unique solution $u \in C^{1,2}(]0,\infty[\times\mathbb{R}^N) \cap C^0([0,+\infty[\times\mathbb{R}^N)$ de (2) tq $u(0,x) = u_0(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

De plus on a le principe de maximum.

$$\sup_{[0,\infty[\times\mathbb{R}^N} u(t,x) = \sup_{\mathbb{R}^N} u_0(x)$$

$$\inf_{[0,\infty[\times\mathbb{R}^N} u(t,x) = \inf_{\mathbb{R}^N} u_0(x)$$

Pr : On pose $\Omega_T = [0,T] \times \mathbb{R}^N$ et on définit la suite

$$u^{(-1)} \equiv 0$$

et

$$\forall k \geq 0 \quad \begin{cases} u_t^{(k)} - \Delta u^{(k)} = |\nabla u^{(k-1)}|^p \text{ dans } (0,T] \times \mathbb{R}^N \\ u^{(k)}(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

$u^{(0)}$ sol de l'eq de la chaleur $\to u^{(0)} \in C^{1,2} \cap C^0([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ $\forall T$

$u^{(1)}$ ———————— avec 2^d membres.

Alors (partie eq chaleur)

$$u^{(k)}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, G(t,x-y)\,dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t G(t-s,x-y)\,\left|Du^{(k-1)}(s,y)\right|^p dy\,ds$$

(partie second membre).

On dérive

$$Du^{(k)}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} Du_0(y)\, G(t,x-y)\,dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t D_x G(t-s,x-y)\,\left|Du^{(k-1)}(s,y)\right|^p dy\,ds.$$

On dérive :

$$\Delta u^{(k)}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u_0(y)\; G(t,x-y)\,dy.$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t D_x G(t-s,x-y)\cdot D\left(\left|Du^{(k-1)}(s,y)\right|^p\right) dy\,ds$$

On pose

$$M_k(t) = \sup_{\Omega_t} \left|Du^{(k)}\right|$$

On a :

$$M_k(t) \le M_0(t) + \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t |D_x G(t-s, x-y)|\, M_{k-1}^p(s)\,dy\,ds$$

car : $u_0(x) = u^0(0,x) \Rightarrow Du_0 = Du^{(0)}$

et $\int_{\mathbb{R}^N} G(t,x)\,dx = 1$.

donc

$$(5) \quad M_k(t) \le M_0(t) + \int_0^t \beta (t-s)^{-\frac{1}{2}} M_{k-1}^p(s)\,ds.$$

car $\int_{\mathbb{R}^N} |DG(t,x)|\,dx = \beta t^{-\frac{1}{2}}$

où $\beta = \int_{\mathbb{R}^N} |DG(1,x)|\,dx$.

Or

$$u^0(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x-y)\, u_0(y)\,dy + 0$$

$$\Rightarrow |Du^0(x,t)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x-y)\, Du_0(y)\,dy \right|$$

$$\le \|Du_0\|_{L^\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} |G(t, x-y)|\,dy}_{=1}$$

$$\Rightarrow \quad M_0(t) \leq \|Du_0\|_{L^\infty}.$$

Par récurrence d'après (5) on montre que:

$$(6) \quad M_h(t) \leq 2\|Du_0\|_{L^\infty} \qquad \forall\, h \geq 0$$

$$\text{et} \quad \forall\, t \leq T^* = \left[2^{p+1}\beta \|Du_0\|^{p-1}_{L^\infty}\right]^{-2}$$

$$\Big(\underline{\text{car}} \quad M_{h+1}(t) \leq M_0(t) + \beta \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} 2^p \|Du_0\|^p_{L^\infty}\, ds$$

$$\leq \|Du_0\|_{L^\infty} + \beta\, 2^p \|Du_0\|^p_{L^\infty} \left[-2(t-s)^{\frac{1}{2}}\right]_0^t$$

$$\leq \|Du_0\|_{L^\infty} + \underbrace{2^{p+1}\beta \|Du_0\|^p_{L^\infty} \cdot 2^{-p-1}\beta^{-1}\|Du_0\|^{1-p}_{L^\infty}}_{\text{car } t \leq T^*}$$

$$\leq \|Du_0\|_{L^\infty} + \|Du_0\|_{L^\infty}$$

donc

$$(7) \quad \|Du^{(h)}(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq 2\|Du_0\|_{L^\infty}.$$

Comme $a^p - b^p \leq C_p\,(a-b)(a^{p-1} + b^{p-1})$.

d'après (7) dans Ω_{T^*}

$$\left| |Du^{(h)}(t,x)|^p - |Du^{(h-1)}(t,x)|^p \right|$$

$$\leq C_p \left| D(u^{(h)} - u^{(h-1)})(t,x)\right| \Big(\underbrace{\|Du^{(h)}(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^\infty} + \|Du^{(h-1)}(t,\cdot)\|^{p-1}_{L^\infty}}_{\leq 2\|Du_0\|^{p-1}} \Big)$$

d'où

(8) $$\Big|\, |\nabla u^{(k)}(t,x)|^p - |\nabla u^{(k-1)}(t,x)|^p \Big| \leq C^p \|\nabla u_0\|_{L^\infty}^{p-1} \times \Big|\nabla\big(u^{(k)} - u^{(k-1)}\big)(t,x)\Big|.$$

On pose $\boxed{N_k(t) = \sup_{\Omega_t} \big|\nabla\big(u^{(k)} - u^{(k-1)}\big)(s,x)\big|}$

d'après le calcul de $\nabla u^{(k)}$ et d'après (8)

(9) $$N_k(t) \leq C_p \beta \|\nabla u_0\|_{L^\infty}^{p-1} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} N_{k-1}(s)\,ds. \quad \forall t \leq T^*$$

Par récc on montre que:

$$N_k(T^*) \leq C_p \beta \|\nabla u_0\|_{L^\infty}^{p-1} \underbrace{T^{*\frac{k}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)\right)^{-1}}_{\sim \underbrace{\frac{T^{*\frac{k}{2}}}{k!}}_{\text{terme général d'une série convergente.}}}.$$

donc par déf de N_k.

$\Rightarrow \{\nabla u^{(k)}\}_k$ converge unif^t sur Ω_{T^*}.

De même d'après l'expression de u^{k} et (8) - (9) $\{u^{k_n}\}_{k_n}$ converge unif^t sur Ω_{T^*}.

De la m̂ manière on montre que.

$\{\Delta u^{k_n}\}_{k_n}$ est equicontinue dans Ω_{T^*}

Donc $\exists\, u \in C((0,T^*)\times\mathbb{R}^N)$ tq Du et $\Delta u \in C((0,T^*)\times\mathbb{R}^N)$ /

$$u^{k_n} \longrightarrow u \quad \text{unif}^t \text{ sur } \Omega_{T^*}$$

$$Du^{k_n} \longrightarrow Du$$

$$\Delta u^{k_n} \longrightarrow \Delta u$$

d'où qd $k_n \longrightarrow +\infty$.

$$u_t - \Delta u = |Du|^p \quad \text{ds } \mathcal{D}'((0,T^*)\times\mathbb{R}^N)$$

or $u_t = \Delta u + |Du|^p \in C((0,T^*)\times\mathbb{R}^N)$

donc $u \in C^1((0,T^*)\times\mathbb{R}^N)$ et l'éq au sens classique.

Unicité sur $(0,T^*)\times\mathbb{R}^N$

Soit v une autre solution :

$$(10)\quad \begin{cases} v_t = \Delta v + |Dv|^p & \text{dans } (0,T^*)\times\mathbb{R}^N \\ v(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

On pose $N(t) = \sup_{\mathbb{R}_t} |D(u-v)|$ et on obtient comme en (9)

$$N(t) \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} N(s)\,ds.$$

le lemme de Gronwall $\Rightarrow N(t)=0$ sur $(0,T^*)$
donc $u=v$ sur $(0,T^*)\times\mathbb{R}^N$.

- Pour montrer que u déf sur $\mathbb{R}_{T^*}$ ~~peut~~ être étendue à $[0,\infty[\times\mathbb{R}^N$ on utilise l'estimation :

$$\boxed{\|Du(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|Du_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}$$

• Mrq

$$\boxed{\sup_{[0,\infty[\times\mathbb{R}^N} u(t,x) = \sup_{\mathbb{R}^N} u_0(x)}$$

Pr: Soit $\eta > 0$.

On pose

$$v(t,x) = u(t,x) - \left(\eta^{\frac{1}{3}} t + \eta |x|^2\right)$$

On suppose que v atteint un maximum dans (Ω_T) en $(\bar{t}, \bar{x}) \in \,]0,T\,]\times\mathbb{R}^N$

(existe car $\|u\|_{L^\infty(\Omega_T)} < \infty$)

On a :

$$Du(\bar{t},\bar{x}) = 2\eta\bar{x}$$

$$u_t - \eta^{\frac{1}{3}} = 0 \qquad \Delta u - 2N\eta = 0.$$

D'après l'eq vérifiée par u

$$\Rightarrow |Du|^p - \eta^{\frac{1}{3}} + 2N\eta \geq 0 \quad (*)$$

Posons $M = \|u\|_{L^\infty(\Omega_T)}$

Au point $(\bar{t},\bar{x})$ on a :

$$u(\bar{t},\bar{x}) - \left(\eta^{\frac{1}{3}}\bar{t} + \eta|\bar{x}|^2\right) \geq -M$$

car $\sup_{\Omega_T}\left(u(t,x) - \left(\eta^{\frac{1}{3}} t + \eta|x|^2\right)\right) \geq u(0,0) \geq -M$

donc

$$\eta|\bar{x}|^2 \leq 2M.$$

donc en reportant dans $\ast$, et en utilisant la ~~maj~~ majoration: $\left(|Du|^p = 2^p\eta^p|\bar{x}|^p \leq 2^p \eta^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{2}} M^{\frac{p}{2}}\right)$

on obtient:

$$2^{\frac{3}{2}p} M^{\frac{p}{2}} \eta^{\frac{p}{2}} \leq \eta^{\frac{1}{3}} - 2N\eta. \qquad \underline{p>1}$$

En prenant η assez petit on obtient une contradiction.

Donc

$$\sup_{]0,T]\times\mathbb{R}^N} \left(u(t,x) - \left(\eta^{\frac{1}{3}}t + \eta|x|^2\right)\right) = \sup_{\mathbb{R}^N}\left(u_0(x) - \eta|x|^2\right).$$

pour $\eta < \eta_0$.

Ainsi en faisant tendre $\eta \to 0$. on obtient le résultat cherché:

$$\boxed{\sup_{]0,T)\times\mathbb{R}^N} u(t,x) = \sup_{\mathbb{R}^N} u_0(x)}$$