Equations différentielles stochastiques (EDS)

Considérons l'équation de KPZ suivante, écrite en terme d'équation de Langevin

$$\dot{h} = f(h,t) + g(h,t)\eta(t), \tag{1}$$

où pour simplifier les écritures, on ommet la dépendance de h avec x. C'est à dire que l'on se place à une position x donnée, et on étudie les variations de la hauteur de déposition en fonction du temps [1]. On considère également le bruit $\eta(t)$ comme étant un bruit blanc gaussien :

$$\langle \eta(t) \rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2D\delta(t-t'). \tag{2}$$

Processus de Wiener : L'étude des EDS fait intervenir le processus de Wiener associé au bruit blanc gaussien, et dont l'expression est

$$W(t) = \int_0^t \eta(t')\mathrm{d}t'. \tag{3}$$

On peut montrer que la quantité $W(t)$ peut être intégrée mais non différenciée. En effet, en considérant le rapport

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W(t+\Delta t) - W(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W(t)}{\Delta t}, \tag{4}$$

on peut calculer la probabilité pour que cette limite donne une valeur finie., inférieure ou égale à une constante v (vitesse). Cette probabilité, compte tenu de la définition du bruit gaussien, s'écrit

$$\mathbb{P} = \int_{-v\Delta t}^{+v\Delta t} \mathrm{d}(\Delta W) p(\Delta W, \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D \Delta t}} \int_{-v\Delta t}^{+v\Delta t} \mathrm{d}(\Delta W) \exp\left[-\frac{(\Delta W)^2}{4D\Delta t}\right]. \tag{5}$$

Soit, en utilisant la fonction erreur,

$$\mathbb{P} = \mathrm{erf}\left[\sqrt{\frac{v\Delta t}{2D}}\right]. \tag{6}$$

Expression qui tend vers 0 lorsque Δt tend vers 0.
Ainsi, on n'obtiendra jamais une valeur finie pour la dérivée. Ceci implique que la vitesse correspondant au processus de Wiener sera toujours $\pm\infty$. On ne peut pas *a priori* utiliser la quantité $\mathrm{d}W(t) = \eta(t)\mathrm{d}t$. Or cette quantité apparaît dans l'intégrale première de (1) :

$$h(t) - h(0) = \int_0^t f(h,t')\mathrm{d}t' + \int_0^t g(h,t')\eta(t')\mathrm{d}t' \tag{7}$$

La deuxième intégrale du membre de droite doit donc être définie "plus rigoureusement". On utilise pour cela les intégrales dites intégrales stochastiques.

[1] La démarche présentée est inversement valable pour un bruit $\eta(x)$, à t fixé.

Intégrales stochastiques

Une intégrale stochastique est définie par

$$I(t) = \int_0^t G(s)\eta(s)\mathrm{d}s = \int_0^t G(s)\mathrm{d}W(s) \tag{8}$$

On approxime ensuite cette intégrale par

$$I^{(\alpha)}(t) = \lim_{n\to\infty} I_n^{(\alpha)} \tag{9}$$

avec, en posant $t_i = it/n$,

$$I_n^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n} G\left[(1-\alpha)t_{i-1} + \alpha t_i\right][W(t_i) - W(t_{i-1})] \tag{10}$$

Le problème est de déterminer à quel temps la quantité $h(t)$ doit être évaluée dans $g(h,t)$. Dans la relation (10), cela revient à se demander s'il faut choisir pour G la valeur juste avant t_i (i.e $t_i - \delta t_i$), juste après (i.e $t_i + \delta t_i$), ou une autre comprise entre les 2 valeurs ?

Pour $G(t) = W(t)$, on montre que :

$$I(t) = \int_0^t G(s)\mathrm{d}W(s) = \frac{1}{2}\left[W^2(t) - W^2(0) + (2\alpha - 1)t\right] \tag{11}$$

Cette expression dépend du paramètre α. Ce paramètre permet d'avoir une certaine souplesse dans le choix de la valeur de h à choisir pour évaluer le processus G.

Les deux approches les plus utilisées sont celles d'Itô ($\alpha = 0$) et de Stratonovich ($\alpha = 1/2$).

Calcul d'Itô

Itô a établit des relations appelées "règles d'Itô" :

$$\mathrm{d}W_i(t)\mathrm{d}W_j(t) = \delta_{ij}\mathrm{d}t, \tag{12}$$

$$[\mathrm{d}W(t)]^N = 0 \quad , \quad \forall N > 2, \tag{13}$$

$$\mathrm{d}W(t)^N\mathrm{d}t = 0 \quad , \quad \forall N \geq 1, \tag{14}$$

$$\mathrm{d}t^N = 0 \quad , \quad \forall N > 1. \tag{15}$$

L'écriture de l'équation de Langevin rencontrée dans la littérature sous la forme

$$\mathrm{d}y(t) = \Phi_1(y(t),t)\mathrm{d}t + \Phi_2(y(t),t)\sqrt{\mathrm{d}t}, \tag{16}$$

trouve son origine dans la règle (12), puisque la quantité $\mathrm{d}W(t)$ peut être regardée comme étant d'ordre 1/2 en temps.

Pour Itô, l'équation de Langevin (1) s'écrira

$$\mathrm{d}h(t) = f(h,t)\mathrm{d}t + g(h,t)\mathrm{d}W(t). \tag{17}$$

et l'intégrale permière de cette équation s'effectue grâce à la relation

$$\int_0^t W(t)\mathrm{d}W(t) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} W(t_{i-1})\Delta W_i\right] = \frac{1}{2}\left[W^2(t) - W^2(0) - t\right], \tag{18}$$

Ainsi, Itô évalue la fonction "juste avant" le moment où le bruit agit sur la quantité h. On peut constater par ailleurs que la relation (18) ne respecte pas les règles classiques d'intégration.

Partant de (17), toute fonction ϕ de $h(t)$ développée en série telle que

$$\mathrm{d}\phi = \partial_h \phi \mathrm{d}h + \frac{1}{2}\partial_{hh}\phi(\mathrm{d}h)^2 + \dots \tag{19}$$

donnera, en utilisant les règles d'Itô, la formule d'Itô :

$$\mathrm{d}\phi = \left(f\partial_h\phi + \frac{g^2}{2}\partial_{hh}\phi \right) \mathrm{d}t + g\partial_h\phi \ \mathrm{d}W. \tag{20}$$

La quantité $g\partial_h\phi \ \mathrm{d}W$ est appelée correction d'Itô L'utilité de la formule d'Itô apparait en en prenant la valeur moyenne, puisque celle-ci fait émerger la densité de probabilité de la caractéristique $x(t)$:

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \int \phi(h) \ \partial_t p(h,t|,h_0,t_0) \ \mathrm{d}h; \tag{21}$$

et qui, compte tenu de la formule d'Itô, conduit à l'expression

$$\int \phi(h)\partial_t p(h,t|,h_0,t_0) \ \mathrm{d}h = \int \mathrm{d}h \left[f\mathrm{d}h\phi + \frac{g^2}{2}\partial_{hh}\phi \right] p \tag{22}$$

Puis, en intégrant par partie, on obtient successivement

$$\left\{ [\phi p f] - \int \mathrm{d}h \ \phi \ \partial_h(pf) \right\} + \frac{1}{2}\left\{ [pg^2\partial_h\phi] - \int \mathrm{d}h \ \partial_h \ \phi\partial_h(pg^2) \right\} \tag{23}$$

$$= - \int \mathrm{d}h \ \phi \ \partial_h(pf) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}h \ \phi \ \partial_{hh}(pg^2) \tag{24}$$

$$= \int \mathrm{d}h \ \phi(h) \left\{ -\partial_h(fp) + \frac{1}{2}\partial_{hh}(g^2 p) \right\} \tag{25}$$

La fonction $\phi(h)$ étant choisit arbitrairement, on obtient au final l'équation FP suivante

$$\partial_t p(h,t|h_0,t_0) = -\partial_h\Big[f(h,t)p(h,t|h_0,t_0) \Big] + \frac{1}{2}\partial_{hh}\Big[g^2(h,t)p(h,t|h_0,t_0) \Big], \tag{26}$$

où $g(h,t)$ représenterait le coefficient de dérive de la caractéristique h à l'abscisse t, et $f(h,t)$ le coefficient de diffusion. Dans ce cas, l'équivalent des coefficients de Kramers-Moyal $D^{(1)}$ et $D^{(2)}$ sont

$$D^{(1)}(h,t) = f(h,t), \tag{27}$$

$$D^{(2)}(h,t) = g^2(h,t). \tag{28}$$

Nous avons ainsi l'équation de Langevin et son équation FP associée au processus d'Itô :

$$\text{Itô} \begin{cases} \mathrm{d}h(t) = f(h,t)\mathrm{d}t + g(h,t)\mathrm{d}W(t), \\ \partial_t p(h,t|h_0,t_0) = -\partial_h\Big[f(h,t)p(h,t|h_0,t_0) \Big] + \frac{1}{2}\partial_{hh}\Big[g^2(h,t)p(h,t|h_0,t_0) \Big] \end{cases}$$

Calcul de Stratonovich

Pour Stratonovich, l'équation de KPZ-Langevin s'écrit

$$\mathrm{d}h = f(h,t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\{g[h(t) + g(t+\mathrm{d}t)]\}\mathrm{d}W, \tag{29}$$

et l'intégrale stochastique

$$\int_0^t W(t)\mathrm{d}W = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{W(t_{i-1}) + W(t_i)}{2} \Delta W_i \right] = \frac{1}{2}\left[W^2(t) - W^2(0) \right]. \tag{30}$$

Ainsi, pour Stratonovich la quantité $h(t)$ est calculée comme étant la valeur moyenne de valeurs justa avant et juste après que le bruit n'agisse. de plus, contrairement au calcul d'Itô, on retrouve des règles "classiques" d'intégration.

Compte tenu des règles d'Itô, l'équation de Langevin 29 s'écrit cette fois-ci

$$\mathrm{d}h = [f(h,t) + \frac{1}{2}g(h,t)\partial_h g(h,t)]\mathrm{d}t + g(h,t)\mathrm{d}W(t) \tag{31}$$

En suivant le même raisonnement que pour le cas d'Itô, c'est à dire en considérant la quantité $\langle \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t\rangle$, on arrive à l'équation de FP pour la probabilité de transition $p(h,t|h_0 t_0)$:

$$\partial_t p = \partial_h[g - \frac{1}{2}g\ \partial_h f]p + \frac{1}{2}\partial_{hh}[fp] \tag{32}$$

Dans ce cas, les coefficient du développement de Kramers-Moyal prenennent la forme

$$D^{(1)}(h,t) = f(h,t) + g(h,t)\partial_h g(h,t), \tag{33}$$

$$D^{(2)}(h,t) = g^2(h,t); \tag{34}$$

La quantité $g(h,t)\partial_h g(h,t)$ étant ordinairement appelée "dérive induite par le bruit".

Finalement, l'équation de Langevin et l'équation FP associée au processus de Stratonovich se lisent

$$\text{Strato.}\begin{cases} \mathrm{d}h(t) = f(h,t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\{g[h(t) + g(t+\mathrm{d}t)]\}\mathrm{d}W, \\ \partial_t p(h,t|h_0,t_0) = -\partial_t p(h,t|h_0 t_0) = \partial_h[g - \frac{1}{2}g\ \partial_h f]p(h,t|h_0 t_0) + \frac{1}{2}\partial_{hh}[fp(h,t|h_0 t_0)] \end{cases}$$

Conclusion

Selon la façon dont on caractérise les variations de h par rapport au bruit, on arrive à des interprétations physiques différentes : les probabilités de transitions pour que, à une position x donnée, on passe d'une hauteur h_0 à une hauteur h en un temps $t - t_0$, sont différentes. il convient donc de déterminer le plus précisément possible les caractéristiques du bruit agissant sur le dépôt.

BIBLIOGRAPHIE

- K. ITÔ, *On Stochastic Differential Equations*, Mem. Am. Math. Soc. **4**, 1-51, (1951).
- R. L. STRATONOVICH, *Conditional Markov Process and Their Application to the Theory of optimal Control* (Elsevier, New York 1968).
- SIAM J. Control **4**, 362-371, (1966).
- C. W. GARDINER, *Handbook of Stochastic Methods*, SPRINGER 1997.
- N. G. VAN. KAMPEN, *Itô versus Stratonovich*, J. Stat. Phys. **24**, 175-187, (1981).