

Une théorie de Bass-Serre pour les groupoïdes boréliens

Aurélien Alvarez

aurelien.alvarez@univ-orleans.fr

Cet article est un compagnon de [Alv08] dans lequel nous démontrons un théorème de Kurosh pour les relations d'équivalence boréliennes. Nous prolongeons ici les techniques de [Alv08] et développons une théorie de Bass-Serre pour les groupoïdes boréliens. Nous introduisons une notion de produit libre « abstrait » dans la catégorie des groupoïdes boréliens, ce qui nous permet de donner un cadre unifié incluant les actions des relations d'équivalence boréliennes sur les arboretums (cf. [Alv08]) et la théorie de Bass-Serre classique telle qu'elle est développée dans [Ser77] pour les actions de groupes sur les arbres.

La théorie de Bass-Serre (cf. [Ser77], voir aussi [SW79] pour une approche plus topologique) a pour principal objet les groupes opérant sans inversion sur des arbres et donne un théorème de structure pour ces groupes. Plus précisément, généralisant les notions de produit libre, de produit amalgamé, d'extension HNN, Bass et Serre introduisent le groupe fondamental d'un graphe de groupes (bien défini à isomorphisme près) et démontrent que tout groupe opérant (sans inversion) sur un arbre est isomorphe au groupe fondamental d'un certain graphe de groupes dont le graphe sous-jacent est en fait l'espace quotient de l'action du groupe sur l'arbre. L'un des ingrédients de la théorie de Bass-Serre est la construction d'un graphe de groupes à partir de la donnée d'une action (sans inversion) d'un groupe sur un graphe. La donnée d'un arbre maximal dans le quotient permet de relever l'ensemble des sommets du graphe quotient en un sous-arbre du graphe initial et ce relèvement permet de définir des groupes de sommets. Il reste alors à relever les arêtes du graphe quotient qui n'appartiennent pas à l'arbre maximal choisi et à préciser les monomorphismes correspondants dans le graphe de groupes, l'idée étant qu'à chacune de ces « extra-arêtes » est associé un « extra-élément » du groupe (c'est-à-dire n'appartenant pas aux groupes de sommets précédemment définis) qui induit un « amalgame » entre les groupes de sommets correspondants. Par construction, on en déduit un morphisme du groupe fondamental du graphe de groupes dans le groupe qui opère et la théorie de Bass-Serre dit que c'est en fait un isomorphisme si on est parti d'une action sur un arbre.

Nous souhaitons ici préciser que nos constructions et nos techniques ont véritablement été inspirées par la théorie de Bass-Serre telle qu'elle est exposée dans l'excellent livre [Ser77] de Serre. Et le premier point fut de construire un analogue du graphe de groupes capturant toute l'information de l'action : c'est la notion de *désingularisation* (déf. 31). La théorie de Bass-Serre pour les groupoïdes boréliens que nous développons est une généralisation de la théorie classique pour les groupes où l'espace X est réduit à un singleton. Plusieurs phénomènes nouveaux apparaissent dans ce contexte. Parmi ceux-ci, mentionnons :

- la difficile notion de « quotient » qui est ici un espace singulier. Ceci a notamment pour conséquence qu'il n'existe pas de désingularisation « canonique ». En un certain sens, ceci est dû au fait qu'un isomorphisme partiel de l'espace peut toujours être découpé en un ensemble dénombrable d'isomorphismes partiels ;
- l'équivalence orbitale est dans ce contexte une notion d'isomorphisme trop forte et doit être remplacée par la notion d'isomorphisme stable. Voici deux raisons à l'origine de ceci. Tout d'abord, la notion de relation d'équivalence borélienne « triviale » : dans le contexte borélien/mesuré, les relations lisses ont un rôle analogue à la relation dont les classes sont réduites à des singletons. D'autre part, étant donné une action d'une relation d'équivalence borélienne sur un champ de graphes borélien, toute l'information sur l'action est en fait contenue dans toute restriction à un domaine complet de la relation ;

- c'est dans la catégorie des groupoïdes boréliens qu'il existe une notion satisfaisante de produit amalgamé de relations et ces constructions généralisent celles déjà connues et introduites par Gaboriau dans [Gab00]. Ainsi le bon cadre est en fait celui des groupoïdes boréliens et nous obtenons ainsi une généralisation naturelle de la théorie de Bass-Serre.

Théorème 1. *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien agissant sans inversion sur un arboretum sur X . Alors \mathcal{G} est stablement isomorphe au groupoïde fondamental borélien d'un certain graphe de groupoïdes.*

Remerciements : Je tiens à remercier sincèrement Damien Gaboriau pour son encouragement tout au long de ce travail, Jean Renault pour de nombreuses discussions autour des groupoïdes ainsi que Frédéric Paulin pour tout le soin qu'il a accordé à une première version de ce texte.

Un *espace fibré standard* (F, \mathcal{B}_F, π) est la donnée d'un espace borélien standard F sur X et d'une application borélienne (appelée projection) $\pi : F \rightarrow X$ surjective à pré-images dénombrables. La fibre F_x d'un élément x de X est la pré-image de x par π . Une *section borélienne* s de F est une application borélienne de X dans F telle que $\pi \circ s$ soit égale à l'identité. Si A est une partie borélienne de X et si s n'est définie que sur A , alors nous parlerons de *section partielle*. Un espace fibré standard sur X admet toujours une section borélienne. Ceci est une conséquence du théorème suivant (voir [Kur66], [Kec95]) :

Théorème 2 (Théorème de sélection). *Soit F un espace fibré standard sur X . Alors il existe une famille dénombrable de sections partielles de F dont les images forment une partition (borélienne et dénombrable) de F . De plus, on peut toujours supposer qu'au moins l'une de ces sections partielles est une section borélienne, c'est-à-dire définie sur X tout entier.*

Une application immédiate de ce théorème est que pour tout espace fibré F standard sur X , il existe une numérotation borélienne des fibres de F , c'est-à-dire une application borélienne $N : F \rightarrow \mathbf{N}^*$ telle que la restriction de N à toute fibre de F soit injective. De plus, quitte à renuméroter les fibres de F , on peut toujours supposer que dans chaque fibre la numérotation commence à 1 et ne saute pas d'entiers naturels.

I Groupoïdes boréliens et arboretums

Dans ce premier paragraphe, nous étendons au cadre des groupoïdes boréliens un certain nombre de notions rencontrées au cours de notre étude des actions de relations d'équivalence boréliennes (cf. [Alv08]). En particulier, nous allons définir les notions de *groupoïde borélien libre* (déf. 5) et de *groupoïde quotient* (déf. 21).

Définition 3 (Groupoïde borélien). *Un groupoïde borélien \mathcal{G} est une petite catégorie telle que :*

- tous les morphismes soient inversibles et l'ensemble de tous les morphismes un espace borélien standard ;
- les applications source s et but r soient à fibres dénombrables ;
- la composition \cdot des morphismes de $\mathcal{G}^c = \{(\gamma, \gamma') \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} ; s(\gamma') = r(\gamma)\}$ dans \mathcal{G} et l'application inverse $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ soient des applications boréliennes.

Remarque : L'ensemble des objets de \mathcal{G} s'identifie à une partie de \mathcal{G} via l'application injective $d : x \mapsto \text{id}_x$. Les applications s et r sont boréliennes car $s(\gamma) = \gamma \cdot i(\gamma)$ et $t(\gamma) = i(\gamma) \cdot \gamma$ pour tout γ de \mathcal{G} . Ces dernières étant à fibres dénombrables, on en déduit que l'ensemble des objets est en fait identifié à une partie borélienne de \mathcal{G} . Nous dirons alors que \mathcal{G} est un groupoïde borélien standard sur X lorsque l'espace des objets, avec sa structure borélienne induite par \mathcal{G} , est X .

Exemple fondamental : L'action α par automorphismes boréliens d'un groupe dénombrable Γ sur un espace borélien standard X définit naturellement un groupoïde borélien sur X . En effet, les morphismes sont les triplets (x, γ, y) où x et y sont deux éléments de X tels que $\alpha(\gamma)(x) = y$ pour γ dans Γ , de source x et de but y . La composition des morphismes (x, γ, y) et (y, γ', z) est bien sûr le morphisme $(x, \gamma \cdot \gamma', z)$ pour tous x, y, z dans X et γ, γ' dans Γ .

Remarque : Étant donné un groupoïde borélien \mathcal{G} sur X , un sous-groupoïde \mathcal{H} de \mathcal{G} sur une partie borélienne A de X est une partie borélienne de \mathcal{G} contenant A et telle que, pour tous éléments γ et γ' de même but x appartenant à A , on ait $\gamma \cdot \gamma'^{-1}$ appartenant à \mathcal{H} . Par exemple, étant donné une partie borélienne A de X , le groupoïde borélien $\mathcal{H}|_A$ sur A dont les morphismes sont les morphismes de \mathcal{G} de sources et de buts dans A est un sous-groupoïde de \mathcal{G} .

Définition 4 (Morphisme). *Un morphisme de groupoïdes boréliens $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un foncteur (de petite catégorie) borélien, où \mathcal{G} et \mathcal{H} sont des groupoïdes boréliens sur X et Y . Autrement dit, f est une application borélienne telle que, pour tous éléments γ et γ' composables de \mathcal{G} , on ait $f(\gamma \cdot \gamma') = f(\gamma) \cdot f(\gamma')$ ainsi que*

$$f(s(\gamma)) = s(f(\gamma)), \quad f(r(\gamma)) = r(f(\gamma)) \quad \text{et} \quad f(i(\gamma)) = i(f(\gamma)).$$

Une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur X définit un groupoïde borélien $(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}, o = \pi_l, r = \pi_r)$ sur X : on dit dans ce cas qu'il s'agit d'un groupoïde borélien *principal*, les groupes d'isotropie étant triviaux. Ainsi, pour tout couple (x, y) d'éléments \mathcal{R} -équivalents de X , la source de (x, y) est x , le but y , l'inverse (y, x) , la composition de deux tels couples (x, y) et (y, z) pour z dans la \mathcal{R} -classe de x étant donnée par le couple (x, z) , le morphisme identité en x étant quant à lui le couple (x, x) . Rappelons qu'un exemple fondamental de groupoïde borélien principal est donné par une action *libre* α par automorphismes boréliens d'un groupe dénombrable Γ sur un espace borélien standard X .

Notons également que tout groupoïde borélien \mathcal{G} sur X définit naturellement une relation d'équivalence borélienne sur X que nous noterons $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$: deux éléments x et y sont $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ -équivalents s'il existe un morphisme de \mathcal{G} de source x et de but y . Nous dirons qu'un sous-groupoïde \mathcal{H} de \mathcal{G} est défini sur un domaine complet de \mathcal{G} s'il est défini sur un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$. Enfin, remarquons également qu'un morphisme de groupoïdes boréliens induit en particulier un morphisme de relations d'équivalence boréliennes entre les groupoïdes boréliens principaux correspondants.

Remarque : On déduit de la définition précédente la notion d'*isomorphisme* entre groupoïdes boréliens. Nous dirons que \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont deux groupoïdes boréliens *stablement isomorphes* s'il existe des domaines complets A et A' de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{G}'}$ tels que les restrictions $\mathcal{G}|_A$ et $\mathcal{G}'|_{A'}$ soient isomorphes.

Les relations d'équivalence boréliennes arborables constituent une classe de relations d'équivalence boréliennes très intéressante puisque par définition elles sont engendrées par les graphages les plus simples en un certain sens et parce que, comme nous l'avons déjà mentionné, les différents invariants qui ont été introduits pour étudier les relations d'équivalence mesurées (cf. [Gab00], [Gab02]) sont généralement plus faciles à calculer pour les relations arborables. La notion de *groupoïde borélien libre* que nous introduisons ici en est une généralisation au cadre des groupoïdes boréliens.

Définition 5 (Groupoïde borélien libre). *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien sur X et \mathcal{S} une partie borélienne de \mathcal{G} . On dit que \mathcal{G} est libre sur \mathcal{S} si, pour tout groupoïde borélien \mathcal{H} sur Y et pour toute paire d'applications boréliennes (f^0, f^1) où $f^0 : X \longrightarrow Y$ et $f^1 : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{H}$ vérifiant*

$$\forall \sigma \in \mathcal{S} \quad f^0(s(\sigma)) = s(f^1(\sigma)) \quad (\text{resp. } f^0(r(\sigma)) = r(f^1(\sigma))),$$

il existe un unique morphisme de groupoïdes boréliens $\bar{f} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel qu'en restriction à l'espace des objets X de \mathcal{G} , \bar{f} coïncide avec f^0 , et en restriction à \mathcal{S} , \bar{f} coïncide avec f^1 .

Remarque : Il n'est pas difficile de voir que les groupes d'isotropie d'un groupoïde borélien libre sont des groupes libres. Plus précisément, pour tout élément x de X , le groupe d'isotropie \mathcal{G}_x de \mathcal{G} en x , par définition constitué des éléments de \mathcal{G} dont la source et le but sont égaux à x , est libre sur l'ensemble des mots $m = \sigma_1 \dots \sigma_n$, c'est-à-dire des suites finies composables au sens des groupoïdes d'éléments σ_i de \mathcal{S} , tels que la source et le but de m soient x et tels que les buts des mots $\sigma_1 \dots \sigma_i$ pour $i < n$ soient différents de x .

Théorème 6. *Soit \mathcal{S} et X des espaces boréliens standards. Soit r et s des applications boréliennes de \mathcal{S} dans X à pré-images dénombrables. Alors il existe (à unique isomorphisme près) un unique groupoïde borélien $(\mathcal{G}(\mathcal{S}), s, r)$ sur X contenant \mathcal{S} tel que $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ soit libre sur \mathcal{S} .*

Démonstration : L'unicité découle de la propriété universelle. Voici une construction algébrique analogue à celles des groupes libres. Désignons par \mathcal{S}^{-1} une copie de \mathcal{S} et prolongeons les applications boréliennes source s et but r à $\mathcal{S} \sqcup \mathcal{S}^{-1} \sqcup X$ par l'identité sur X et en posant $s(\sigma) := r(\sigma^{-1})$ et $r(\sigma) := s(\sigma^{-1})$ pour tout élément σ de \mathcal{S} . On considère alors l'ensemble \mathcal{M} des mots non vides (c'est-à-dire des suites finies non vides) en les éléments de \mathcal{S} , \mathcal{S}^{-1} et X tels que le but d'un élément constitutif d'un mot soit la source de l'éventuel élément suivant dans le mot ; les applications s et r étant boréliennes, \mathcal{M} hérite de X et \mathcal{S} une structure naturelle borélienne standard. La loi de concaténation/réduction des mots composables, c'est-à-dire tels que le but du premier mot soit la source du second, passe au quotient par la plus petite relation d'équivalence \mathcal{R} identifiant $\sigma^\varepsilon \cdot \sigma^{-\varepsilon}$ et x pour tout σ de \mathcal{S} de source $s(\sigma) = x$ ($\varepsilon = \pm 1$) et tout élément de X avec la suite vide dans tout mot de longueur au moins deux. Par définition, \mathcal{R} est une relation d'équivalence borélienne standard lisse sur \mathcal{M} car tout élément de \mathcal{M} a un représentant favori, et $\mathcal{G}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}/\mathcal{R}$ est ainsi un groupoïde borélien sur X dont l'identité id_y en y pour tout élément y de X est l'image de y dans ce quotient. Notons que seule la preuve de l'associativité de la loi de concaténation n'est pas immédiate mais se démontre comme dans le cas de l'une des constructions du groupe libre (voir par exemple [KMS76]).

Si \mathcal{H} est un groupoïde borélien sur Y et (f^0, f^1) une paire d'applications boréliennes $f^0 : X \rightarrow Y$ et $f^1 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$ vérifiant

$$\forall \sigma \in \mathcal{S} \quad f^0(s(\sigma)) = s(f^1(\sigma)) \quad (\text{resp. } f^0(r(\sigma)) = r(f^1(\sigma))),$$

on pose

$$\bar{f}(\sigma_1^{\varepsilon_1} \dots \sigma_n^{\varepsilon_n}) = f(\sigma_1)^{\varepsilon_1} \dots f(\sigma_n)^{\varepsilon_n} \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

□

Comme dans le cas des groupes libres, on montre que tout élément de $(\mathcal{G}(\mathcal{S}), s, r)$ s'écrit de manière unique comme un produit $\sigma_1^{\varepsilon_1} \dots \sigma_n^{\varepsilon_n}$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$, les σ_i appartenant à \mathcal{S} et $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ si $\sigma_i = \sigma_{i+1}$.

Remarque : Rappelons qu'un graphage (cf. [KM04]) est par définition la donnée d'une partie borélienne \mathcal{S} symétrique, localement dénombrable et ne rencontrant pas la diagonale de $X \times X$. C'est une manière de se donner, pour tout élément x de X , des voisins de $x : y$ est un voisin de x si par définition $(x, y) \in \mathcal{S}$. On définit alors

$$s((x, y)) = x \quad r((x, y)) = y \quad \text{et} \quad i((x, y)) = (y, x).$$

Considérons sur \mathcal{S} la relation d'équivalence borélienne engendrée par la symétrie par rapport à la diagonale : celle-ci est lisse puisque chaque classe a exactement deux éléments. Notons $\mathcal{S}^{1/2}$ un domaine fondamental de cette dernière. Si le groupoïde borélien libre $\mathcal{G}(\mathcal{S}^{1/2})$ sur $\mathcal{S}^{1/2}$ est principal, alors le graphage \mathcal{S} est un arborage sur X (de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}(\mathcal{S}^{1/2})}$). Réciproquement, si \mathcal{S} est un arborage sur X , alors le groupoïde borélien libre sur $\mathcal{S}^{1/2}$ est bien sûr principal. Retenons le fait suivant : étant donné un graphage \mathcal{S} sur X , le groupoïde borélien libre $\mathcal{G}(\mathcal{S}^{1/2})$ sur un domaine fondamental $\mathcal{S}^{1/2}$ est principal si et seulement si \mathcal{S} est un arborage sur X .

Nous venons ainsi de généraliser la notion de graphage : c'est la donnée d'applications boréliennes $r, s : \mathcal{S} \rightarrow X$ à pré-images dénombrables. Dans le cas des relations d'équivalence boréliennes, l'arborabilité peut se définir en terme d'arborage ou de L-arborage (cf. [Lev95]) et nous allons montrer qu'il en est de même pour les groupoïdes boréliens libres. En effet, étant donné un L-graphage $\Phi = (\phi_i : A_i \rightarrow B_i)_{i \in I}$ sur X , on définit un groupoïde borélien libre $\mathcal{G}_{\mathcal{S}_\Phi}$ sur X en posant

$$\mathcal{S}_\Phi = \bigsqcup_{i \in I} A_i \quad r(x) = x, \quad s(x) = \phi_i(x) \quad \text{si } x \in A_i.$$

Réciproquement, considérons un espace borélien standard \mathcal{S} muni d'applications boréliennes $r, s : \mathcal{S} \rightarrow X$ à pré-images dénombrables et montrons qu'une telle donnée permet de construire un L-graphage Φ sur X tel que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\Phi$. Pour cela, considérons

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{S} \rightarrow (r, s)(\mathcal{S}) \subset X \times X \\ \sigma \mapsto (r(\sigma), s(\sigma)) \end{cases}.$$

On définit ainsi un espace fibré standard pour lequel le théorème de sélection assure que

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{S}_i$$

et $\pi|_{\mathcal{S}_i}$ est injective, où \mathcal{S}_i est une partie borélienne de \mathcal{S} . Pour chaque i de I , considérons

$$s: \begin{cases} \mathcal{S}_i \subset \mathcal{S} & \longrightarrow & s(\mathcal{S}_i) \subset X \\ \sigma & \longmapsto & s(\sigma) \end{cases} .$$

C'est encore un espace fibré standard dont une nouvelle application du théorème de sélection (cf. th. 2) donne

$$\mathcal{S}_i = \bigsqcup_{j \in J_i} \mathcal{S}_{i,j}$$

et $s|_{\mathcal{S}_{i,j}}$ est injective, avec $\mathcal{S}_{i,j}$ une partie borélienne de \mathcal{S}_i . Pour chaque j de J_i , considérons enfin

$$r: \begin{cases} \mathcal{S}_{i,j} \subset \mathcal{S} & \longrightarrow & r(\mathcal{S}_{i,j}) \subset X \\ \sigma & \longmapsto & r(\sigma) \end{cases}$$

et une dernière application du théorème de sélection donne

$$\mathcal{S}_{i,j} = \bigsqcup_{k \in K_{i,j}} \mathcal{S}_{i,j,k},$$

tel que $r|_{\mathcal{S}_{i,j,k}}$ soit injective sur une certaine partie borélienne $\mathcal{S}_{i,j}$ de $\mathcal{S}_{i,j}$. Il ne reste plus alors qu'à définir

$$\phi_{i,j,k}: \begin{cases} \mathcal{S}_{i,j,k} & \longrightarrow & r(\mathcal{S}_{i,j,k}) \\ x & \longmapsto & r \circ s^{-1}(x) \end{cases} ,$$

et, par construction, les $\phi_{i,j,k}$ sont des isomorphismes partiels de X définissant un L-graphage Φ comme souhaité.

Ainsi nous venons de démontrer que la donnée d'un L-graphage sur X est une donnée équivalente à celle d'applications boréliennes $r, s : \mathcal{S} \longrightarrow X$ à pré-images dénombrables, cette dernière généralisant la notion d'arborage et plus généralement de graphage. D'où la définition suivante :

Définition 7 (Parties génératrices). *Une partie génératrice sur X est la donnée d'un espace borélien standard \mathcal{S} et d'applications boréliennes r et s de \mathcal{S} dans X à pré-images dénombrables.*

Étant donné un groupoïde borélien \mathcal{G} sur X , une partie borélienne \mathcal{S} de \mathcal{G} est une partie génératrice de \mathcal{G} si le groupoïde borélien engendré par \mathcal{S} dans \mathcal{G} coïncide avec \mathcal{G} .

Notons que si \mathcal{S} est une partie génératrice d'un groupoïde borélien \mathcal{G} sur X , la propriété universelle des groupoïdes boréliens libres assure qu'il existe un unique morphisme de groupoïdes boréliens $f : \mathcal{G}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{G}$, surjectif puisque \mathcal{S} engendre \mathcal{G} .

Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien sur X et \mathcal{S} une partie borélienne de \mathcal{G} . Nous allons désormais définir un \mathcal{G} -champ de graphes borélien $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ sur X , dit de Cayley, canoniquement associé à $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ et généralisant ainsi la construction du \mathcal{R}_Φ -champ de graphes borélien \mathcal{A}_Φ canoniquement associé à la donnée d'une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_Φ sur X et d'un graphage Φ de celle-ci (cf. [Alv08]).

La plupart des définitions que nous avons introduites dans le contexte des relations d'équivalence boréliennes se transpose sans aucune difficulté dans le cadre des groupoïdes boréliens. Précisons cependant ici les définitions de \mathcal{G} -espace fibré standard F , de stabilisateur d'une section partielle de F et de \mathcal{G} -champ de graphes borélien sur X , où \mathcal{G} désigne un groupoïde borélien sur X .

Définition 8. *Une \mathcal{G} -action (à gauche) sur l'espace fibré standard (F, π) sur X est une application borélienne*

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}, r) \star (\mathbb{F}, \pi) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (\gamma, t) &\longmapsto \gamma \cdot t \end{aligned}$$

telle que, pour tout couple (γ, γ') d'éléments $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ vérifiant $s(\gamma') = r(\gamma)$ et pour tout t appartenant à \mathbb{F} dans la fibre de $r(\gamma')$, on ait

$$\text{id}_{r(\gamma')} \cdot t = t \quad \text{et} \quad \gamma \cdot (\gamma' \cdot t) = (\gamma \cdot \gamma') \cdot t.$$

On dit alors que (\mathbb{F}, π) est un \mathcal{G} -espace fibré standard sur X et que \mathcal{G} agit sur \mathbb{F} .

Notons qu'un \mathcal{G} -espace fibré standard \mathbb{F} engendre un groupoïde borélien $\mathcal{G}_{\mathbb{F}}$ sur \mathbb{F} dont les morphismes sont les triplets (f_y, γ, f_x) de source f_x , de but f_y , où f_x et f_y désignent des éléments dans les fibres respectives d'éléments x et y de X et tels que $f_y = \gamma \cdot f_x$ avec γ appartenant à \mathcal{G} de source x et de but y .

Exemple fondamentale : $(\mathbb{F}, \pi) = (\mathcal{G}, s)$ définit un \mathcal{G} -espace fibré standard sur X avec l'action suivante :

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}, r) \star (\mathcal{G}, s) &\longrightarrow (\mathcal{R}, s) \\ (\gamma, \gamma') &\longmapsto \gamma \cdot \gamma' \end{aligned}$$

Nous dirons que (\mathcal{G}, s) est le \mathcal{G} -espace fibré standard canonique source associé à \mathcal{R} . De même, nous avons le \mathcal{G} -espace fibré standard canonique but (\mathcal{G}, r) .

Définition 9 (Stabilisateur). Si s désigne une section partielle de \mathbb{F} définie sur une partie borélienne A sur X , on appelle stabilisateur $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(s)$ de s le sous-groupoïde de $\mathcal{G}|_A$ suivant : l'élément γ de source x et de but y , où x et y désignent des éléments de A , appartient à $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(s)$ si et seulement si $\gamma \cdot s(y) = s(x)$.

Définition 10 (\mathcal{G} -arboretum). Un \mathcal{G} -champ de graphes borélien (\mathcal{A}, π) sur X est un graphe dont les espaces de sommets et d'arêtes sont des \mathcal{G} -espaces fibrés standards (\mathcal{A}^0, π^0) et (\mathcal{A}^1, π^1) sur X et tel que les applications sommet origine $o : \mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathcal{A}^0$, sommet terminal $t : \mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathcal{A}^0$ et arête opposée $\bar{\cdot} : \mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathcal{A}^1$ soient des morphismes de \mathcal{G} -espaces fibrés standards. On note \mathcal{A}_x le sous-graphe d'ensemble de sommets $(\pi^0)^{-1}(x)$ et d'ensemble d'arêtes $(\pi^1)^{-1}(x)$. Si \mathcal{A}_x est un arbre pour tout x de X , nous dirons que (\mathcal{A}, π) est un \mathcal{G} -arboretum.

Venons-en à la construction du \mathcal{G} -champ de graphes borélien $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ sur X de Cayley d'un groupoïde borélien \mathcal{G} sur X et d'une partie borélienne \mathcal{S} de \mathcal{G} . L'espace des sommets est l'espace fibré standard $s : \mathcal{G} \longrightarrow X$ dont la fibre d'un élément x de X est constituée des éléments de \mathcal{G} dont la source est x . Bien entendu, dans le cas d'une relation d'équivalence borélienne avec $s = \pi_l$, on retrouve l'espace fibré standard canonique gauche.

Définissons à présent l'espace des arêtes orientées. Pour cela, considérons le produit fibré $\mathcal{G} \star \mathcal{S}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments (g, s) de $\mathcal{G} \times \mathcal{S}$ tels que le but de γ coïncide avec la source de s . L'espace des arêtes orientées est alors l'espace fibré standard $\mathcal{G} \star \mathcal{S}$ munie de la projection dans X qui, à un couple d'éléments (γ, σ) associe la source de γ . Les applications d'attachement (sommet origine et sommet terminal) sont naturellement définies ainsi : pour tout élément x de X , si (γ, σ) est une arête au-dessus de x (c'est-à-dire $s(\gamma) = x$), on a

$$s((\gamma, \sigma)) = \gamma \quad \text{et} \quad r((\gamma, \sigma)) = \gamma \cdot \sigma.$$

Remarque : Dans le cas d'une relation d'équivalence borélienne et d'un graphage, on retrouve le champ de graphes borélien associé.

Proposition 11. Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien sur X et \mathcal{S} une partie borélienne de \mathcal{G} . Le champ de graphes borélien de Cayley $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ de $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ est un arboretum si et seulement si \mathcal{G} est libre sur \mathcal{S} .

Démonstration : C'est une conséquence des deux faits suivants :

- les fibres de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ sont connexes si et seulement si \mathcal{S} engendre \mathcal{G} ;
- les fibres de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ sont sans circuit si et seulement si \mathcal{S} est une famille libre.

□

Nous allons désormais voir que le champ de graphes borélien $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ (orienté par construction) de Cayley de $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ est en fait un \mathcal{G} -champ de graphes borélien sur X . En effet, l'espace des sommets est le \mathcal{G} -espace fibré standard canonique source sur X . De même l'espace des arêtes est un \mathcal{G} -espace fibré standard sur X et \mathcal{G} agit en préservant la coloration naturelle des arêtes donnée par la partie génératrice \mathcal{S} .

Définition 12 (Inversion). *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien et \mathcal{A} un \mathcal{G} -champ de graphes borélien sur X . Une inversion est la donnée d'un élément x de X , d'une arête a_x dans la fibre \mathcal{A}_x de x et d'un élément γ_x du groupe d'isotropie \mathcal{G}_x de \mathcal{G} en x tels que $\gamma_x \cdot a_x$ soit égal à $\overline{a_x}$.*

— Toutes les actions que nous considérerons dans la suite sont supposées sans inversion. Cette hypothèse est automatiquement vérifiée pour les groupoïdes boréliens principaux.

Un groupoïde borélien \mathcal{G} sur X est dit *lisse* s'il est principal et si la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ qu'il engendre sur X est lisse.

Définition 13 (Action lisse). *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien et F un \mathcal{G} -espace fibré standard sur X . Un domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur F est une partie borélienne de F qui rencontre toutes les classes de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_F}$ et qui est disjointe de n'importe lequel de ses translatés par un élément non trivial de \mathcal{G} .*

L'action de \mathcal{G} sur F est dite lisse s'il existe un domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur F , autrement dit si le groupoïde borélien \mathcal{G}_F engendrée par l'action de \mathcal{G} sur F est un groupoïde borélien lisse.

Remarquons que si l'action de \mathcal{G} sur F est lisse, alors la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_F}$ sur F engendrée par l'action de \mathcal{G} sur F est lisse puisqu'un domaine fondamental de l'action est en particulier un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_F}$. Mais la réciproque est fautive car un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_F}$ n'est pas *a priori* un domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur F à cause des groupes d'isotropie de \mathcal{G} .

Exemple fondamental : Comme nous l'avons vu, un groupoïde borélien \mathcal{G} sur X agit sur son espace fibré standard canonique source (\mathcal{G}, s) et l'image de $d : X \rightarrow \mathcal{G}$ est un domaine fondamental de cette action. De même, \mathcal{G} agit sur son espace fibré standard canonique but (\mathcal{G}, r) et ces deux actions de « \mathcal{G} sur \mathcal{G} » commutent. Étant donné \mathcal{H} un sous-groupoïde de \mathcal{G} défini sur un domaine complet A de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$, son action lisse sur (\mathcal{G}, r) passe au quotient et permet de définir le \mathcal{G} -espace fibré standard (source du couple $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$) $(\mathcal{G}/\mathcal{H}, s)$ sur X dont la diagonale $d_{\mathcal{H}}$ est une section partielle définie sur A dont l'image rencontre toutes les orbites de l'action de \mathcal{G} sur $(\mathcal{G}/\mathcal{H})$ et dont le \mathcal{G} -stabilisateur est le sous-groupoïde \mathcal{H} de \mathcal{G} .

Définition 14 (Action quasi-libre). *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien et F un \mathcal{G} -espace fibré standard sur X . L'action de \mathcal{G} sur F est quasi-libre si, pour toute section partielle de F , le stabilisateur $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(s)$ de s sous l'action de \mathcal{G} est un groupoïde borélien lisse.*

De même que pour les actions lisses, remarquons que si l'action de \mathcal{G} sur F est quasi-libre, alors la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ induite par \mathcal{G} sur X agit quasi-librement sur F . Mais la réciproque est fautive à cause des groupes d'isotropie de \mathcal{G} qui entraîne que $\text{Stab}_{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}}(s)$ peut être une sous-relation lisse de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$, sans pour autant que $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(s)$ soit un sous-groupoïde principal de \mathcal{G} , où s désigne une section partielle de F .

Proposition 15. *Soit F un \mathcal{G} -espace fibré standard où \mathcal{G} est un groupoïde borélien sur X . Alors l'action de \mathcal{G} est quasi-libre si et seulement si elle est lisse.* □

Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien sur X et \mathcal{S} une partie borélienne de \mathcal{G} . Désignons par s une section partielle de sommets du \mathcal{G} -champ de graphes borélien orienté de Cayley $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ associé à $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$. L'espace X , identifié à aux identités de \mathcal{G} , étant un domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur l'espace des sommets, on en déduit que, pour toute section partielle s de sommets, le stabilisateur $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(s)$ de s sous l'action de \mathcal{G} est un sous-groupoïde lisse de \mathcal{G} défini sur le domaine de définition

de s . Notons également que la partie borélienne de l'espace des arêtes de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ constituée des arêtes (γ, σ) de $\mathcal{G} \star \mathcal{S}$ telles que $\gamma = \text{id}_x$ pour x dans X et de leurs arêtes inverses est à son tour un domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur l'espace des arêtes de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$.

Nous allons maintenant introduire la notion de *graphe borélien* et voir qu'on peut associer naturellement un groupoïde borélien libre à un tel graphe borélien.

Définition 16 (Graphe borélien). *Un graphe borélien G est un graphe localement dénombrable (c'est-à-dire que chaque sommet n'a qu'un nombre dénombrable de sommets voisins) dont les ensembles de sommets G^0 et d'arêtes G^1 sont des espaces boréliens standards et tel que les applications sommet origine o , sommet terminal t et arête opposée $\bar{}$ soient des applications boréliennes.*

Soit G un graphe et x un sommet de G . Si a est une arête de G de sommets origine et terminal x , l'éclatement de a est une arête de sommet origine x et de sommet terminal une copie x_a du sommet x . L'étoile de x est le graphe dont l'ensemble des sommets est constitué de x , des sommets adjacents à x dans G et des sommets x_a pour toute arête a de sommets origine et terminal x , et dont l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de G dont une et une seule des extrémités est x ainsi que des éclatements des arêtes a de sommets origine et terminal x .

Définition 17. *Un morphisme de graphes boréliens est un morphisme de graphes dont les applications sous-jacentes entre sommets et arêtes sont boréliennes.*

Exemple : Un arboretum sur X possède une structure canonique de graphe borélien. Plus généralement, un champ de graphes borélien sur X est en particulier un graphe borélien. Un morphisme de champs de graphes borélien induit un morphisme de graphes boréliens entre les graphes boréliens canoniques associés.

Remarque : Un graphe borélien G induit naturellement une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_G sur l'espace des sommets G^0 , chaque classe de \mathcal{R}_G étant canoniquement munie d'une structure de graphe connexe, son *graphe de Cayley*. Si chaque classe de \mathcal{R}_G possède une structure d'arbre, nous dirons que G est une *forêt borélienne*. En particulier, un arboretum sur X possède une structure canonique de forêt borélienne. Si la relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_G engendrée par un graphe borélien G est lisse, alors G définit naturellement un champ de graphes borélien (\mathcal{A}, π) sur un domaine fondamental X de \mathcal{R}_G où, pour tout élément x de X , la π -fibre de x est le graphe de Cayley de la classe de x ; c'est un arboretum sur X si G est une forêt borélienne. Notons enfin qu'un graphe borélien G engendre un groupoïde borélien libre $\mathcal{G}_G = \mathcal{G}(\mathcal{S})$ où $\mathcal{S} = G^1$, $s = o$ et $r = t$. Bien entendu, \mathcal{R}_G n'est autre que la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_G}$ sur X engendrée par \mathcal{G}_G (cf. p. 3). On en déduit que \mathcal{G}_G est un groupoïde borélien principal si et seulement si G est une forêt borélienne.

Donnons à présent l'exemple qui a motivé notre définition des graphes boréliens. Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien agissant (sans inversion) sur un champ de graphes boréliens \mathcal{A} sur X . On suppose que l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A} est *lisse*, c'est-à-dire que les actions de \mathcal{G} sur \mathcal{A}^0 et \mathcal{A}^1 sont lisses : notons A^0 et A^1 les espaces quotients de \mathcal{A}^0 et \mathcal{A}^1 par $\mathcal{R}_{\mathcal{G}\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{G}\mathcal{A}^1}$ respectivement. Les morphismes d'attachement des arêtes passent au quotient et l'espace quotient $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ de cette action est naturellement un graphe borélien dont les espaces de sommets et d'arêtes sont A^0 et A^1 . Notons que si \mathcal{G} est un groupoïde borélien principal et si \mathcal{A} est un \mathcal{G} -arboretum, alors $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ est une forêt borélienne.

Nous terminons ce premier paragraphe en donnant un sens à la notion de groupoïde borélien quotient. Pour ceci, nous allons définir les notions de sous-groupoïdes *distingués* et *totalement isotropes* qui nous seront fort utiles dans la suite. Les notions de groupoïdes boréliens principal et totalement isotrope sont en un certain sens « orthogonales » puisque c'est une conséquence immédiate des définitions qu'un groupoïde borélien principal et totalement isotrope sur X est le groupoïde borélien trivial sur X , c'est-à-dire dont les seuls morphismes sont les identités id_x en tout point de X .

Définition 18 (Totalement isotrope). *Un groupoïde borélien \mathcal{G} sur X est totalement isotrope si la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ associée à \mathcal{G} sur X est triviale.*

À tout groupoïde borélien \mathcal{G} sur X , on associe naturellement un groupoïde borélien \mathcal{G}^{ti} totalement isotrope sur X dont les éléments sont les éléments des groupes d'isotropie de \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}^{ti} = \{\gamma \in \mathcal{G} ; s(\gamma) = r(\gamma)\},$$

qui est bien un groupoïde borélien sur X , ce qui découle de la régularité borélienne de s et r .

Introduisons maintenant le *noyau d'isotropie* d'un morphisme : c'est un deuxième exemple de groupoïde borélien totalement isotrope.

Définition 19 (Noyau d'isotropie). *Soit $f : (\mathcal{G}_1, X_1) \longrightarrow (\mathcal{G}_2, X_2)$ un morphisme de groupoïdes boréliens. Le noyau d'isotropie de f est le sous-groupoïde de \mathcal{G}_1 défini ainsi :*

$$\text{KerIs}(f) = \left\{ \gamma_1 \in \mathcal{G}_1 ; s(\gamma_1) = r(\gamma_1) \quad f(\gamma_1) = \text{id}_{f(s_{\gamma_1})} \right\}.$$

Remarque : Le noyau d'isotropie d'un morphisme de groupoïdes boréliens f est bien un groupoïde borélien car $\text{KerIs}(f) = \{\gamma_1 \in \mathcal{G}_1^{ti} ; f(\gamma_1) = f(s_{\gamma_1})\}$ (la stabilité par composition étant évidente). De plus, remarquons que f induit pour tout élément x_1 de X_1 un morphisme de groupes $f_{x_1} : \mathcal{G}_{1,x_1} \longrightarrow \mathcal{G}_{2,f(x_1)}$. Le groupe d'isotropie de $\text{KerIs}(f)$ en x_1 n'est autre que $\text{KerIs}(f_{x_1})$.

Pour tout élément γ_1 de \mathcal{G}_1 et tout élément θ de $\text{KerIs}(f)$ tels que $r(\gamma_1) = s(\theta)$, on a

$$f(\gamma_1 \cdot \theta \cdot \gamma_1^{-1}) = f(\gamma_1) \cdot f(\gamma_1)^{-1} = \text{id}_{o(\gamma_1)}.$$

Autrement dit, $\text{KerIs}(f)$ est un sous-groupoïde distingué de \mathcal{G}_1 dans le sens suivant :

Définition 20 (Sous-groupoïde distingué). *Un sous-groupoïde \mathcal{H} d'un groupoïde borélien \mathcal{G} sur X est distingué ($\mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$) si pour tout élément γ de \mathcal{G} et tout élément θ de $\mathcal{H}_{r(\gamma)}$, on a*

$$\gamma \cdot \theta \cdot \gamma^{-1} \in \mathcal{H}_{s(\gamma)}.$$

Remarque : Pour tout élément x de X , notons que \mathcal{H}_x est un sous-groupe distingué de \mathcal{G}_x . Remarquons également qu'étant donné une partie borélienne \mathcal{K} de \mathcal{G} telle que, pour tout élément γ de \mathcal{K} , la source et le but de γ soient les mêmes, il existe un plus petit sous-groupoïde distingué de \mathcal{G} engendré par \mathcal{K} .

Nous introduisons une dernière notion : celle de groupoïde borélien quotient d'un groupoïde borélien par un sous-groupoïde distingué totalement isotrope. Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien sur X et \mathcal{H} un sous-groupoïde de \mathcal{G} distingué totalement isotrope. Pour tout élément γ de \mathcal{G} , on définit la classe à gauche de γ :

$$\gamma \cdot \mathcal{H} = \{\gamma \cdot h ; h \in \mathcal{H} \quad s(h) = r(\gamma)\}.$$

On définit sur \mathcal{G} la relation d'équivalence \mathcal{R} dont les classes sont les ensembles (dénombrables) $\gamma \cdot \mathcal{H}$ pour γ appartenant à \mathcal{G} . C'est une relation d'équivalence borélienne car $\gamma \cdot \mathcal{H}$ est égal à $\gamma' \cdot \mathcal{H}$ si et seulement si γ et γ' sont des éléments de \mathcal{G} de même source et tels que $\gamma^{-1} \cdot \gamma'$ appartient à \mathcal{H} . De plus, notons que \mathcal{R} est une relation d'équivalence borélienne lisse. En effet, ceci est une conséquence du fait que les classes de \mathcal{R} soient contenues dans les fibres de l'espace fibré standard canonique but (\mathcal{G}, r) . Ainsi, étant donné une numérotation borélienne des fibres de (\mathcal{G}, r) , on construit un domaine fondamental de \mathcal{R} en considérant le plus petit élément, dans chaque fibre de (\mathcal{G}, r) , de chaque classe de \mathcal{R} .

Définition 21 (Groupoïde quotient). *L'espace quotient \mathcal{G}/\mathcal{R} est un groupoïde borélien sur X , noté \mathcal{G}/\mathcal{H} , avec la loi de composition suivante*

$$(\gamma_1 \cdot \mathcal{H}) \cdot (\gamma_2 \cdot \mathcal{H}) = (\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \mathcal{H},$$

où le but de γ_1 est égal à la source de γ_2 et

$$s(\gamma \cdot \mathcal{H}) = s(\gamma) \quad r(\gamma \cdot \mathcal{H}) = r(\gamma).$$

Il n'est pas difficile de vérifier le bien-fondé des différents points de cette définition ; par exemple, c'est la condition d'isotropie totale qui assure que r soit bien définie. De la même façon, on peut définir la classe à droite d'un élément γ de \mathcal{G} et la condition d'isotropie assure une nouvelle fois que

$$\mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G} \iff \forall \gamma \in \mathcal{G} \quad \gamma \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H} \cdot \gamma.$$

Remarque : Attention à ne pas confondre, dans le cas sous-groupeïde distingué totalement isotrope, le groupeïde quotient que nous venons de définir et le \mathcal{G} -espace fibré standard canonique source du couple $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ qui tous les deux sont notés pour abrégé \mathcal{G}/\mathcal{H} . Dans la suite, nous préciserons bien à chaque fois les objets en question.

Étant donné un groupeïde borélien \mathcal{G} sur X et \mathcal{H} un sous-groupeïde distingué totalement isotrope, notons $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ l'application $\gamma \longmapsto \gamma \cdot \mathcal{H}$. Par définition, p est naturellement surjective de noyau isotrope égal à \mathcal{H} .

Mentionnons également que p satisfait la propriété universelle suivante : pour tout morphisme de groupeïdes boréliens $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ tel que le noyau isotrope de f contienne \mathcal{H} , il existe un unique morphisme de groupeïdes boréliens $\bar{f} : \mathcal{G}/\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}'$ tel que le diagramme suivant commute. Bien entendu, \bar{f} est l'unique morphisme de groupeïdes boréliens défini par $\bar{f}(\gamma \cdot \mathcal{H}) = f(\gamma)$ pour tout γ de \mathcal{G} .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G}' \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ \mathcal{G}/\mathcal{H} & & \end{array}$$

Terminons cette partie par les remarques suivantes. À tout groupeïde borélien \mathcal{G} sur X , nous avons associé une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ sur X . D'autre part, on peut également considérer le groupeïde quotient de \mathcal{G} par son sous-groupeïde borélien distingué totalement isotrope \mathcal{G}^{ti} sur X : c'est un groupeïde borélien principal sur X qui n'est autre que le groupeïde borélien principal $(\mathcal{R}, o = \pi_l, r = \pi_r)$.

Si Φ est un L-graphage sur X , nous venons de voir que la relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_{Φ} s'identifie au groupeïde quotient du groupeïde borélien libre \mathcal{G}_{Φ} sur Φ par son sous-groupeïde borélien distingué totalement isotrope \mathcal{G}_{Φ}^{ti} sur X . Autrement dit, la donnée d'un L-graphage d'une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} permet de définir une *présentation* de \mathcal{R} . Notons enfin que le cas d'un L-arboretum correspond exactement au cas où le sous-groupeïde borélien distingué totalement isotrope \mathcal{G}_{Φ}^{ti} sur X est le groupeïde borélien trivial, c'est-à-dire dont les seuls morphismes sont les identités en tout point de X .

Définition 22 (Présentation). *Une présentation d'un groupeïde borélien \mathcal{G} sur X est la donnée*

- d'une partie génératrice \mathcal{S} de \mathcal{G} (cf. déf. 7);
- et d'une partie borélienne \mathcal{K} du groupeïde borélien libre $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ telle que, pour tout élément γ de \mathcal{K} , la source et le but de γ soient les mêmes,

telle que le sous-groupeïde distingué totalement isotrope engendré par \mathcal{K} soit le noyau du morphisme canonique $\mathcal{G}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{G}$.

On déduit de cette définition un isomorphisme canonique entre le groupeïde quotient du groupeïde borélien libre $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ par le sous-groupeïde distingué totalement isotrope engendré par \mathcal{K} et \mathcal{G} .

II \mathcal{G} -arboretums

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux actions de groupeïdes boréliens sur des arboretums. Nous commencerons par rappeler la notion d'*espace singulier* (introduite par Connes dans [Con79]) et nous verrons que l'« espace quotient » d'une action d'un groupeïde borélien \mathcal{G} sur un arboretum \mathcal{A} sur X est naturellement un *graphe singulier* (déf. 25). Nous définirons pour une telle action la notion de *désingularisation* (déf. 31) au travers de la notion de *graphe de groupeïdes* (déf. 29). Nous expliciterons le cas important des actions quasi-libres (th. 33) dont nous déduirons que les sous-groupeïdes d'un groupeïde borélien libre sont libres (cor. 38). Le résultat central du deuxième paragraphe de cette partie est un théorème de structure pour tout groupeïde borélien \mathcal{G} agissant sur un arboretum \mathcal{A} sur X (th. 43). Dans le cas particulier où X est un singleton, on retrouve la théorie de Bass-Serre classique des actions de groupes sur les arbres. Nos résultats et leurs démonstrations sont largement inspirés de la théorie de Bass-Serre classique telle qu'elle est exposée dans [Ser77].

1 Graphes de groupoïdes et désingularisation

Commençons par préciser la notion d'*espace singulier* (voir également [Con79]). On dit qu'une application surjective π à pré-images dénombrables d'un espace borélien standard X dans un ensemble Y est une *désingularisation principale* de Y si, en tant que partie de $X \times X$, l'ensemble des couples (x, y) tels que les images par π de x et de y soient égales dans Y est une partie borélienne de $X \times X$. Autrement dit, π est une désingularisation principale de Y si la relation d'équivalence dont les classes sont les pré-images de π est une relation d'équivalence borélienne sur X . Deux désingularisations principales de Y sont dites *équivalentes* si les relations d'équivalence boréliennes sous-jacentes sont stablement orbitalement équivalentes.

Exemple fondamental : Si \mathcal{R} est une relation d'équivalence borélienne sur X , la projection canonique de X dans X/\mathcal{R} est une désingularisation principale de l'ensemble quotient.

Définition 23 (Connes, [Con79]). *Une structure singulière sur un ensemble Y est la donnée d'une classe d'équivalence de désingularisations principales. On appelle espace singulier un ensemble muni d'une structure singulière.*

Exemple : Si \mathcal{R} est une relation d'équivalence borélienne sur X , alors l'espace quotient X/\mathcal{R} a une structure canonique d'espace singulier. Dans la suite, nous désignerons par $Y = X/\mathcal{R}$ un espace singulier dont une désingularisation principale définit la relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur l'espace borélien standard X . Nous dirons encore qu'une telle \mathcal{R} sur X est une désingularisation principale de Y .

Définition 24 (Morphisme singulier). *Soit Y et Y' des espaces singuliers. Un morphisme d'espaces singuliers f de Y dans Y' est une application de Y dans Y' telle qu'il existe des désingularisations principales π et π' de Y et Y' définies respectivement sur les espaces boréliens standards X et X' et une application borélienne F de X dans X' telle que $\pi' \circ F$ soit égale à $f \circ \pi$. Nous dirons qu'une telle application F est une désingularisation de f .*

Soit $\pi_i : X_i \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) des désingularisations principales de Y et de même des désingularisations $\pi'_j : X'_j \rightarrow Y'$ ($j = 1, 2$) de Y' . Désignons par $f_{12} : A_1 \subset X_1 \rightarrow A_2 \subset X_2$ et $f'_{12} : A'_1 \subset X'_1 \rightarrow A'_2 \subset X'_2$ des équivalences orbitales entre domaines complets des différentes relations d'équivalence boréliennes sous-jacentes sur X_i et X'_j . Considérons des morphismes intérieurs $r_2 : X_2 \rightarrow A_2$ et $r'_1 : X'_1 \rightarrow A'_1$ des relations d'équivalence boréliennes sur X_2 et X'_1 . Si $f : Y \rightarrow Y'$ est un morphisme d'espaces singuliers et $F : X_1 \rightarrow X'_1$ une désingularisation de f , alors $f'_{12} \circ r'_1 \circ F \circ f_{12}^{-1} \circ r_2 : X_2 \rightarrow A'_2 \subset X'_2$ est encore une désingularisation de f .

Les deux notions suivantes sont des généralisations de celles de graphe borélien (cf. déf. 16) et de morphismes de graphes boréliens pour lesquelles les espaces de sommets et d'arêtes sont en fait des espaces boréliens standards.

Définition 25 (Graphe singulier). *Un graphe singulier est la donnée d'un graphe G_s et d'une structure d'espace singulier sur les ensembles de sommets G_s^0 et d'arêtes G_s^1 telle que les applications sommet origine, sommet terminal et arête opposée soient des morphismes d'espaces singuliers, et que chaque sommet n'ait qu'un ensemble dénombrable de sommets voisins.*

Remarque : Dans le cas où les composantes connexes d'un graphe singulier sont des arbres, nous parlerons de *forêt singulière*.

Définition 26 (Morphisme de graphes singuliers). *Un morphisme de graphes singuliers $f : G_s^1 \rightarrow G_s^2$ est un morphisme de graphes tel que les applications entre espaces de sommets et espaces d'arêtes soient singulières.*

Exemple fondamental : Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien agissant (sans inversion) sur un champ de graphes borélien \mathcal{A} sur X . On désigne par $\mathcal{A}^0/\mathcal{R}_{\mathcal{G}^0}$ et par $\mathcal{A}^1/\mathcal{R}_{\mathcal{G}^1}$ les espaces singuliers définis par les relations d'équivalence boréliennes engendrées par l'action de \mathcal{G} sur les espaces de sommets et d'arêtes. Les morphismes de relations d'équivalence boréliennes $o, t, \bar{}$ passent au quotient en des morphismes singuliers. On obtient ainsi un graphe singulier noté $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$, appelé *graphe singulier quotient* de l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A} . Si \mathcal{G} est un groupoïde borélien principal, alors $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ est une forêt singulière.

Remarque : Dans le cas particulier d'une action lisse de \mathcal{G} sur \mathcal{A} , on retrouve le fait que l'espace quotient $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ est un graphe borélien (cf. p. 8).

Définition 27 (Désingularisation). *Soit X_s un espace singulier. Une désingularisation de X_s est la donnée d'un groupoïde borélien sur un espace borélien standard X telle que la relation d'équivalence borélienne associée soit une désingularisation principale de X_s .*

Nous déduisons de cette définition des notions de désingularisation pour un graphe singulier.

Définition 28. *Une désingularisation (resp. principale) d'un graphe singulier G_s est la donnée d'un graphe borélien G , de groupoïdes boréliens (resp. de relations d'équivalence borélienne) sur les espaces de sommets et d'arêtes de G compatibles (c'est-à-dire que le groupoïde borélien sur les arêtes est un sous-groupoïde du groupoïde borélien sur les sommets via l'application sommet origine) qui induisent les structures singulières sur G_s^0 et G_s^1 .*

Exemple fondamental : Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien agissant (sans inversion) sur un champ de graphes borélien \mathcal{A} sur X . Cette action définit sur les espaces de sommets et d'arêtes de \mathcal{A} des groupoïdes boréliens $\mathcal{G}_{\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{G}_{\mathcal{A}^1}$ (resp. les relations d'équivalences boréliennes $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}^0}}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}^1}}$ qui, par définition d'une action, sont compatibles. On obtient ainsi une désingularisation (resp. principale) du graphe singulier quotient $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$.

Nous allons maintenant généraliser les notions de graphes d'isomorphismes partiels et de graphes de relations (cf. [Alv08]). Rappelons qu'un graphe d'isomorphismes partiels G^{ip} est un graphe dénombrable tel que chaque sommet porte un espace borélien standard et chaque arête porte un isomorphisme partiel dont la source et le but sont des parties boréliennes des espaces boréliens standards portés par les extrémités de l'arête.

Définition 29 (Graphe de groupoïdes). *Un graphe de groupoïdes G^g est la donnée d'un graphe dénombrable G , d'un groupoïde borélien sur un espace borélien standard pour chaque sommet et chaque arête de G de sorte que les groupoïdes boréliens portés par une arête et son arête opposée soient égaux, ainsi que, pour chaque arête a de G , d'un morphisme injectif de groupoïde borélien porté par a dans le groupoïde borélien porté par le sommet terminal de a . Si G est un arbre, nous dirons que G^g est un arbre de groupoïdes.*

Remarque : Il existe bien entendu une notion naturelle de morphismes de graphes de groupoïdes dont nous n'aurons pas besoin.

Via le foncteur d'oubli, à tout arbre de groupoïdes G^g est canoniquement associé un arbre d'isomorphismes partiels G^{ip} . Nous dirons qu'un arbre de groupoïdes G^g est *enraciné* si l'arbre d'isomorphismes partiels G^{ip} sous-jacent à G^g l'est. Ainsi, notons qu'un arbre de groupoïdes enraciné définit naturellement un arboretum sur l'espace borélien standard porté par sa racine. Rappelons que si \mathcal{A} est un champ de graphes borélien sur X et G^{ip} un arbre d'isomorphismes partiels enraciné, une *représentation* de G^{ip} dans \mathcal{A} est un isomorphisme χ entre l'arboretum défini par G^{ip} sur sa racine identifiée à une partie borélienne Y de X et un sous-arboretum de $\mathcal{A}|_Y$. On dit que χ est une représentation de G^{ip} dans \mathcal{A} et que les images (par l'isomorphisme de représentation χ) des espaces boréliens standards portés par les sommets et les arêtes de G^{ip} sont des *représentations* dans \mathcal{A} de ces espaces boréliens standards.

Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien et \mathcal{A} un \mathcal{G} -champ de graphes borélien sur X . Si χ est une représentation dans \mathcal{A} d'un arbre d'isomorphismes partiels enraciné G^{ip} , l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A} donne naissance à des groupoïdes boréliens sur les représentations dans \mathcal{A} des espaces boréliens standards de sommets et d'arêtes de G^{ip} : ce sont respectivement les restrictions de $\mathcal{G}_{\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{G}_{\mathcal{A}^1}$. Une représentation de G^{ip} dans \mathcal{A} induit ainsi une structure d'arbre de groupoïdes G^g sur G^{ip} .

Via le foncteur d'oubli, à tout arbre de groupoïdes G^g est canoniquement associé un arbre d'isomorphismes partiels G^{ip} . Nous dirons qu'un arbre de groupoïdes G^g est *enraciné* si l'arbre d'isomorphismes partiels G^{ip} sous-jacent à G^g l'est. Une *représentation d'un arbre de groupoïdes enraciné G^g dans \mathcal{A}* est une représentation χ de l'arbre d'isomorphismes partiels enraciné G^{ip} sous-jacent à G^g dans \mathcal{A} telle que χ induise des isomorphismes de groupoïdes boréliens entre les groupoïdes boréliens portés par les sommets et les arêtes de G^g et les groupoïdes boréliens définis par l'action de \mathcal{G} sur les représentations dans \mathcal{A} des espaces boréliens standards portés par les sommets et les arêtes de G^{ip} .

Définition 30 (Arboretum de représentants). *Soit \mathcal{A} un \mathcal{G} -champ de graphes borélien sur X . Un arboretum de représentants du graphe singulier quotient $G_s = \mathcal{G} \backslash \mathcal{A}$ est la donnée d'un arbre de groupoïdes enraciné G^g et d'une représentation χ de G^g dans \mathcal{A} telle que les saturés des relations d'équivalence boréliennes induites par les représentations des espaces boréliens standards portés par les sommets de G^g forment une partition de l'espace des sommets \mathcal{A}^0 .*

Remarque : Un arboretum de représentants induit dans $G_s = \mathcal{G} \backslash \mathcal{A}$ une forêt singulière dont l'espace singulier des sommets coïncide avec celui de G_s .

Remarque : Étant donné un relevé d'un arbre maximal de l'espace quotient d'une action d'un groupe sur un graphe connexe, on définit naturellement un arbre de groupes en considérant les stabilisateurs des sommets et des arêtes de ce relevé. Un arboretum de représentants correspond à une donnée analogue dans le cas des groupoïdes boréliens.

Nous allons introduire une dernière notion, celle de *désingularisation d'une action*.

Définition 31 (Désingularisation d'une action). *Une désingularisation de l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A} (ou désingularisation du graphe singulier quotient $G_s = \mathcal{G} \backslash \mathcal{A}$) est la donnée d'un graphe orienté de groupoïdes G^g (c'est-à-dire de graphe sous-jacent G orienté), d'un sous-arbre maximal enraciné A_m de G et d'un isomorphisme partiel ϕ_a de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ pour chaque arête a de l'orientation de G n'appartenant pas à A_m tel que :*

- *l'arbre de groupoïdes enraciné A_m^g induit par G^g sur le sous-arbre maximal enraciné A_m soit un arboretum de représentants du graphe singulier quotient $G_s = \mathcal{G} \backslash \mathcal{A}$ dont l'espace borélien standard porté par la racine de A_m est identifié à X (notons χ l'isomorphisme de représentation) ;*
- *pour toute arête a de l'orientation de G n'appartenant pas à A_m , il existe une section partielle d'arêtes définie sur la source de ϕ_a , dont les sommets origines appartiennent à la représentation dans \mathcal{A} de l'espace borélien standard porté le sommet origine de a et dont les images sous l'action de ϕ_a des sommets terminaux appartiennent à la représentation dans \mathcal{A} de l'espace borélien standard porté le sommet terminal de a . Comme pour les sommets, nous dirons que l'image de cette section partielle est une représentation de l'espace borélien standard associée à l'arête ;*
- *pour toute arête a de l'orientation de G n'appartenant pas à A_m , χ induit un isomorphisme de groupoïdes boréliens entre $\text{Stab}(s_a) \subset \mathcal{G}_{\chi(o(a))}$ et l'image par le morphisme injectif associé à \bar{a} du groupoïde borélien porté par \bar{a} dans le groupoïde borélien porté par $t(\bar{a}) = o(a)$, ainsi qu'un isomorphisme de groupoïdes boréliens entre $\phi_a \text{Stab}(s_a) \phi_a^{-1} \subset \mathcal{R}_{\chi(t(a))}$ et l'image par le morphisme injectif associé à a du groupoïde borélien porté par a dans le groupoïde borélienne porté par $t(a)$;*
- *les saturés des relations d'équivalence boréliennes induites par les représentations des espaces boréliens standards portés par les arêtes de G^g forment une partition de l'espace des arêtes \mathcal{A}^1 .*

Démontrons à présent l'existence d'une désingularisation pour toute action d'un groupoïde borélien sur un arboretum, cas qui nous intéresse le plus pour la suite.

Théorème 32. *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien agissant (sans inversion) sur un arboretum \mathcal{A} sur X . Alors il existe une désingularisation du graphe singulier quotient $G_s = \mathcal{G} \backslash \mathcal{A}$.*

La fin de cette partie est consacrée à la démonstration de ce théorème au cours de laquelle nous démontrerons le théorème suivant concernant le cas particulier des actions quasi-libres :

Théorème 33. *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien agissant quasi-librement (sans inversion) sur un arboretum \mathcal{A} sur X . Alors \mathcal{G} est stablement isomorphe à un groupoïde borélien libre sur X .*

Remarque : Par définition, une action quasi-libre sur un arboretum est une action quasi-libre sur l'espace des sommets et, par suite, sur l'espace des arêtes également. Remarquons qu'il découle de la définition d'action quasi-libre que les groupes d'isotropie de \mathcal{G} agissent librement sur les fibres de \mathcal{A} qui sont des arbres. On en déduit donc déjà que les groupes d'isotropie sont des groupes libres. De même, le théorème 14 de [Alv08] assure que la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ définie par \mathcal{G} sur X est arborable.

Si \mathcal{G} est un groupoïde borélien libre sur une partie borélienne \mathcal{S} , alors \mathcal{G} agit quasi-librement sur le \mathcal{G} -arboretum canonique de Cayley $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ (cf. p. 5). Ceci nous permet de déduire de ce qui précède le théorème suivant :

Corollaire 34. *Un sous-groupoïde d'un groupoïde borélien libre sur X est un groupoïde borélien libre sur X .*

Voici les différentes étapes des démonstrations des résultats précédents :

1. construction d'un arboretum de représentants (A_m^g, χ) de G_s (cf. prop. 35);
2. désingularisation de l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A} (cf. lem. 36);
3. si de plus l'action est quasi-libre, alors la représentation χ de A_m^g dans \mathcal{A} est un sous-arboretum \mathcal{A}' défini sur une partie borélienne $A \subset X$ de $\mathcal{A}|_A$ dont l'espace des sommets \mathcal{A}^0 est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ (cf. rem. p. 14). On en déduit une partie libre et génératrice de \mathcal{G} (cf. lem. 37).

Proposition 35. *Si \mathcal{G} agit (sans inversion) sur un arboretum \mathcal{A} , alors il existe un arboretum de représentants (A_m^g, χ) du graphe singulier quotient $G_s = \mathcal{G} \backslash \mathcal{A}$ tel que la représentation identifie l'espace borélien standard porté par la racine de A_m à X .*

Démonstration : Donnons-nous une numérotation borélienne indexée par les entiers dans chaque fibre de l'espace des sommets \mathcal{A}^0 . Nous allons construire la partie borélienne \mathcal{A}^0 par étape à partir de sections partielles de sommets de \mathcal{A}^0 . Soit s_1 la section borélienne de sommets de \mathcal{A}^0 correspondant au numéro le plus petit dans chaque fibre. Notons U_1 l'image de $X_1 = X$ par s_1 et C_1 le complémentaire dans \mathcal{A}^0 du saturé de U_1 . Si C_1 est vide, alors U_1 est un domaine complet pour l'action de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ sur \mathcal{A}^0 et le résultat est démontré avec A_m un arbre avec un seul sommet portant le groupoïde borélien $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(s_1)$, $\mathcal{A}'^0 = U_1$ et $\mathcal{A}'^1 = \emptyset$.

Soit un entier naturel $n \geq 2$. Supposons avoir construit les familles finies de sections partielles $S_j = \{s_i ; i \in I_j\}$ ($1 \leq j \leq n-1$) de \mathcal{A}^0 dont les domaines de définition sont des parties boréliennes de X et vérifiant les deux conditions suivantes : les saturés des images de ces sections partielles sont d'intersection triviale et l'intersection de la réunion U_{n-1} des images de ces sections partielles avec chaque fibre de \mathcal{A}^0 est une partie connexe. Notons C_{n-1} le complémentaire dans \mathcal{A}^0 du saturé de U_{n-1} . Si ce dernier est vide, la proposition est démontrée avec $\mathcal{A}'^0 = U_{n-1}$ et $\mathcal{A}'^1 = U_{n-1}$ la partie borélienne de \mathcal{A}'^1 constituée des arêtes dont les deux extrémités appartiennent à U_{n-1} .

Sinon, il existe des éléments de C_{n-1} à distance unité de U_{n-1} . En effet, les fibres de \mathcal{A} étant connexes, il existe des éléments de C_{n-1} à distance unité du saturé de U_{n-1} et \mathcal{G} agit en préservant les distances sur \mathcal{A}^0 . Désignons par s_n la section partielle de sommets de \mathcal{A}^0 qui a pour image le plus petit élément à distance unité de U_{n-1} dans chaque fibre. Quitte à découper X_n en un nombre fini de parties boréliennes, on peut raffiner s_n en un nombre fini $S_n = \{s_i ; i \in I_n\}$ de sections partielles dont chacune est telle que les éléments de son image soient à distance unité de l'image de l'une des sections partielles déjà construites.

Montrons désormais que le saturé de la réunion des U_k est égal à l'espace des sommets \mathcal{A}^0 . En effet, sinon il existe un élément a appartenant au complémentaire du saturé de la réunion des U_k dans \mathcal{A}^0 dont la projection $\pi(a)$ est un élément de X_1 . On peut supposer que dans la fibre de $\pi(a)$, le sommet a soit à distance unité de la partie connexe formée par la réunion des sommets $s_k(\pi(a))$ et de numéro minimal. Désignons par n_0 l'entier naturel tel que les sommets a et $s_{n_0}(\pi(a))$ soient adjacents. Mais alors, par construction de la section partielle s_{n_0+1} , on doit avoir que le sommet a est l'image de $\pi(a)$ par s_{n_0+1} , ce qui est absurde.

Il ne reste plus qu'à poser $\mathcal{A}'^0 = \bigcup_{k \geq 1} U_k$ et \mathcal{A}'^1 la partie borélienne de \mathcal{A}'^1 constituée des arêtes

dont les deux extrémités appartiennent à \mathcal{A}'^0 . Par construction, deux sommets de \mathcal{A} dans la même orbite n'appartiennent pas tous les deux à \mathcal{A}'^0 ; puisque le saturé de la réunion des U_k est égal à l'espace des sommets \mathcal{A}^0 , on en déduit que \mathcal{A}' est la représentation d'un arboretum de représentants de G_s . \square

Remarque : Étant donné une action quasi-libre d'un groupoïde borélien \mathcal{G} sur un champ de graphes borélien \mathcal{A} sur X , il existe un sous-arboretum \mathcal{A}' de \mathcal{A} défini sur une partie borélienne A de X dont

l'espace des sommets est un domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A}^0 . Puisque les sommets de \mathcal{A}' forment en particulier un domaine fondamental de la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ engendrée par l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A}^0 , on en déduit que \mathcal{A}' s'injecte par passage au quotient dans $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ en une forêt borélienne dont l'espace borélien standard des sommets coïncide avec celui de $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$.

Lemme 36. *Soit \mathcal{A} un \mathcal{G} -arboretum sur X . Alors il existe une désingularisation de l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A} .*

Démonstration : La proposition 35 assure l'existence d'un arboretum de représentants, c'est-à-dire un arbre de groupoïdes enraciné A_m^r et d'un isomorphisme de représentation χ de A_m^r dans \mathcal{A} telle que l'espace borélien porté par le sommet racine de A_m^r s'identifie avec X . Ainsi les orbites sous l'action de \mathcal{G} des représentations des espaces boréliens standards portés par les sommets de A_m^r forment une partition \mathcal{G} -invariante de l'espace des sommets \mathcal{A}^0 . Désignons par C le complémentaire dans \mathcal{A}^1 des \mathcal{G} -orbites des représentations des espaces boréliens standards portés par les arêtes de A_m^r . Si C est vide, alors A_m^r est déjà une désingularisation de l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A} . Sinon, la partie borélienne C' de C constituée des éléments dont le seul sommet origine appartient à l'arboretum de représentants est non vide car les fibres de \mathcal{A} sont des graphes connexes et que \mathcal{G} agit en préservant les distances sur \mathcal{A}^0 . Nous allons construire une famille de sections partielles de C dont les saturés des images forment une partition borélienne de C .

Soit P un sommet de A_m^r et s la section partielle de sommets de \mathcal{A} représentant l'espace borélien standard associé à P . Pour tout sommet Q de A_m^r , considérons la partie borélienne $C_{(P,Q)}$ de C constituée des arêtes dont le sommet origine appartient à l'image de s et dont le sommet terminal appartient au saturé de la représentation de l'espace borélien standard porté par Q . Si $C_{(P,Q)}$ est non vide, c'est un espace fibré standard sur $\pi(C_{(P,Q)})$ que nous pouvons exhauster à l'aide de sections partielles dont les saturés des images forment une partition borélienne de $C_{(P,Q)}$. Chacune de ces sections partielles d'arêtes donne lieu à une arête dans A_m^r entre les sommets P et Q : le groupoïde borélien associé à chaque nouvelle arête n'est autre que le groupoïde borélien induite par $\mathcal{G}_{\mathcal{A}^1}$ sur l'image de la section partielle de \mathcal{A}^1 correspondante et ce dernier s'injecte comme sous-groupoïde du groupoïde borélien associé à Q via un isomorphisme partiel de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ induit par la section de sommets terminaux de s et l'arboretum de représentants. \square

Lemme 37. *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien agissant quasi-librement (et sans inversion) sur un arboretum \mathcal{A} sur X . Soit \mathcal{A}_r un arboretum de représentants de l'espace quotient $G = \mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ (cf. p. 8). Fixons une orientation \mathcal{G} -invariante sur l'espace des arêtes (ce qui est possible car $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}^1$ est lisse et l'action sans inversion) et notons \mathcal{S} l'ensemble des éléments γ de \mathcal{G} pour lesquels il existe une arête positive reliant $\mathcal{A}_{r,y}$ et $\gamma.\mathcal{A}_{r,x}$ où x et y désignent respectivement la source et le but de γ . Alors \mathcal{G} est un groupoïde borélien libre sur \mathcal{S} .*

Corollaire 38. *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien sur X . Alors \mathcal{G} est libre si et seulement si \mathcal{G} agit quasi-librement sur un arboretum sur X . Par suite, un sous-groupoïde d'un groupoïde borélien libre sur X est libre.*

Remarque : On retrouve le cas particulier des relations d'équivalence boréliennes. En effet, si $\mathcal{G} = \mathcal{R}$ est un groupoïde borélien principal et sous les hypothèses du théorème précédent, \mathcal{R} est libre sur une partie borélienne \mathcal{S} de \mathcal{G} et nous avons vu qu'alors \mathcal{S} est un arborage de \mathcal{R} . Ainsi \mathcal{R} est arborable.

2 Structure de \mathcal{G}

Étant donné un \mathcal{G} -arboretum \mathcal{A} où \mathcal{G} est un groupoïde borélien sur X , nous avons vu (cf. th. 32) l'existence d'une désingularisation du graphe singulier quotient $G_s = \mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$. À partir d'une telle désingularisation dont le graphe de groupoïdes est noté G^g , nous allons voir qu'il est possible de reconstruire \mathcal{G} en termes de *produits amalgamés* des groupoïdes boréliens portés par les sommets de G^g . Plus précisément le théorème 46 assure que \mathcal{G} soit stablement isomorphe au *groupoïde fondamental borélien* (cf. déf. 45) du graphe de groupoïdes G^g .

2.1 Quand la désingularisation est un arbre de groupoïdes

Gaboriau définit dans [Gab00] une relation d'équivalence borélienne qui est le produit amalgamé de deux sous-relations suivant une sous-relation commune. Nous allons ici généraliser ces idées au cadre « plus naturel » des groupoïdes boréliens, ces derniers étant *a priori* définis sur des espaces boréliens standards différents.

À tout arbre de groupoïdes G^g , nous allons associer un groupoïde borélien \mathcal{G}_{G^g} sur un certain espace borélien standard $X_{\mathcal{G}_{G^g}}$ que nous allons décrire, ainsi que des morphismes des groupoïdes boréliens portés par les sommets et les arêtes de G^g dans \mathcal{G}_{G^g} de telle sorte que les diagrammes évidents de morphismes de groupoïdes boréliens induits par les arêtes de G^g soient commutatifs. De plus, le groupoïde borélien \mathcal{G}_{G^g} satisfait la propriété universelle suivante : si \mathcal{H} est un groupoïde borélien sur un espace borélien standard Y et si pour chaque sommet de G^g , on se donne un morphisme du groupoïde borélien porté par ce sommet dans \mathcal{H} de telle sorte que les diagrammes évidents de morphismes de groupoïdes boréliens induits par les arêtes de G^g soient commutatifs, alors il existe un unique morphisme de groupoïdes boréliens de \mathcal{G}_{G^g} dans \mathcal{H} qui fasse commuter tous les diagrammes. La proposition suivante assure l'existence (l'unicité étant une conséquence de la propriété universelle) d'un tel groupoïde borélien \mathcal{G}_{G^g} que nous appellerons la *limite inductive* de l'arbre de groupoïdes G^g .

Proposition 39. *À tout arbre de groupoïdes G^g , on peut associer un groupoïde borélien \mathcal{G}_{G^g} comme ci-dessus, bien défini à isomorphisme unique près.*

Remarque : Dans le cas où X est un singleton, on retrouve la notion de limite inductive d'un arbre de groupes (cf. [Ser77]).

Démonstration : Rappelons que le foncteur *d'oubli* associe à tout arbre de groupoïdes G^g un arbre d'isomorphismes partiels G^{ip} , ce dernier définissant naturellement une relation d'équivalence borélienne sur la réunion disjointe des espaces boréliens standards associés aux sommets de G^{ip} . Désignons par $X_{\mathcal{G}_{G^g}}$ l'espace quotient de cette relation d'équivalence borélienne lisse. Les groupoïdes boréliens associés aux arêtes et aux sommets de G^g s'injectent dans l'espace quotient $X_{\mathcal{G}_{G^g}}$ et induisent ainsi des groupoïdes boréliens définis sur des parties boréliennes de $X_{\mathcal{G}_{G^g}}$. On construit alors \mathcal{G}_{G^g} en se donnant une présentation (cf. déf. 22) de celui-ci : c'est le groupoïde borélien engendré par les injections dans $X_{\mathcal{G}_{G^g}}$ des groupoïdes boréliens portés par les sommets de G^g avec les relations évidentes : pour toute arête a de G^g et tout élément γ du groupoïde borélien porté par l'arête a , on a $\gamma^a \cdot \gamma^{\bar{a}} = id_s(\gamma^a)$, où \cdot^a désigne l'injection du groupoïde borélien porté par l'arête a dans le groupoïde borélien porté par le sommet terminal de a (cf. déf. 29). \square

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne sur X qui est le produit libre (au sens de [Gab00]) des sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 ; autrement dit \mathcal{R} est le produit amalgamé de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 suivant la sous-relation triviale sur X . Considérons le segment de groupoïdes constitué d'un sommet portant le groupoïde borélien principal $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_1}$ de la relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_1 sur X , de l'autre sommet portant $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_2}$ sur X ainsi que de l'unique arête portant le groupoïde borélien trivial sur X et l'isomorphisme partiel « identité » identifiant les trois espaces boréliens standards. La limite inductive de cet arbre de groupoïdes est exactement le groupoïde borélien principal de \mathcal{R} . Plus généralement, si \mathcal{R} est le produit amalgamé sur X de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 suivant la sous-relation \mathcal{R}_3 , alors la limite inductive du segment de groupoïdes naturellement définis par \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 et \mathcal{R}_3 sur X est le groupoïde borélien principal de \mathcal{R} .

Ainsi, étant donné deux relations d'équivalence boréliennes \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sur X ainsi qu'une sous-relation commune \mathcal{R}_3 , on peut construire le produit amalgamé des \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 suivant la sous-relation \mathcal{R}_3 : c'est un groupoïde borélien sur X , bien défini à isomorphisme près. Si ce dernier est principal, on retrouve la définition d'une relation d'équivalence borélienne qui est le produit amalgamé de deux sous-relations suivant une sous-relation commune.

Définition 40 (Produit amalgamé). *Soit (\mathcal{G}_1, X_1) et (\mathcal{G}_2, X_2) deux groupoïdes boréliens et (\mathcal{G}_3, X_3) un sous-groupoïde commun sur une partie borélienne commune X_3 de X_1 et X_2 . Le produit amalgamé de (\mathcal{G}_1, X_1) et (\mathcal{G}_2, X_2) suivant (\mathcal{G}_3, X_3) est la limite inductive $(\mathcal{G}, (X_1 \sqcup X_2)/X_3)$ de (\mathcal{G}_1, X_1) et (\mathcal{G}_2, X_2) suivant (\mathcal{G}_3, X_3) , noté*

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \star_{\mathcal{G}_3} \mathcal{G}_2.$$

En particulier, la définition précédente s'applique au cas de groupoïdes boréliens principaux de relations d'équivalence boréliennes \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sur X ayant une sous-relation commune sur $A \subset X$).

Remarque : Si A est vide, la limite inductive de (\mathcal{G}_1, X_1) et (\mathcal{G}_2, X_2) est alors la réunion disjointe de ces deux groupoïdes boréliens. Ceci s'étend sans difficulté supplémentaire au cas d'une famille dénombrable de groupoïdes boréliens, généralisant ainsi la notion de réunion disjointe d'une famille dénombrable de relations d'équivalence boréliennes.

Ceci permet de donner une nouvelle définition du produit libre de sous-relations. Étant donné une famille dénombrable $(\mathcal{R}_j)_{j \in J}$ de relations d'équivalence boréliennes sur X , on peut considérer le produit libre de leurs groupoïdes boréliens principaux : c'est un groupoïde borélien sur X , non principal *a priori* (par exemple si toutes les \mathcal{R}_j sont des copies d'une même relation d'équivalence borélienne sur X). Si ce dernier est principal, la relation d'équivalence borélienne induite par ce dernier sur X est le produit libre des sous-relations \mathcal{R}_j .

Théorème 41. *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien agissant (sans inversion) sur un arboretum \mathcal{A} sur X . On suppose qu'il existe une désingularisation de l'espace quotient singulier $G_s = \mathcal{G} \backslash \mathcal{A}$ qui soit un arbre de groupoïdes G^g . Alors \mathcal{G} est stablement isomorphe à la limite inductive de G^g .*

Par définition d'une désingularisation, G^g est un arbre de groupoïdes enraciné; si on désigne par A le domaine de définition de la première section partielle de sommets dans la construction de l'arboretum de représentants, la limite inductive \mathcal{G}_{G^g} de G^g est un groupoïde borélien dont l'espace des unités $X_{\mathcal{G}_{G^g}}$ est isomorphe à A (via l'arboretum de représentants et la projection de \mathcal{A} dans X) et nous allons montrer que \mathcal{G}_{G^g} est isomorphe à la restriction de \mathcal{G} à A . Précisons l'idée de la démonstration. À tout arbre de groupoïdes enraciné G^g , on associe un arboretum sur $X_{\mathcal{G}_{G^g}}$ sur lequel la limite inductive de l'arbre de groupoïdes \mathcal{G}_{G^g} agit de telle sorte que G^g soit une désingularisation de cette action. Ainsi, étant donné l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A} et G^g , on en déduit un morphisme de groupoïdes boréliens

$$\psi : \mathcal{G}_{G^g} \longrightarrow \mathcal{G}|_A$$

dont il s'agira de démontrer que c'est un isomorphisme.

Théorème 42. *Soit G^g un arbre de groupoïdes enraciné dont on note \mathcal{G}_{G^g} la limite inductive sur $X_{\mathcal{G}_{G^g}}$. Notons \mathcal{A}^{ip} l'arboretum naturellement défini par l'arbre d'isomorphismes partiels G^{ip} induit par G^g sur l'espace borélien standard A associé à la racine de G^g . Alors il existe un unique (à unique isomorphisme près) arboretum \mathcal{A} sur A contenant \mathcal{A}^{ip} et sur lequel \mathcal{G}_{G^g} agit de telle sorte que G^g soit une désingularisation (via \mathcal{A}^{ip}) de l'espace quotient singulier $\mathcal{G} \backslash \mathcal{A}$.*

Démonstration : Par définition, l'espace des unités $X_{\mathcal{G}_{G^g}}$ de \mathcal{G}_{G^g} est canoniquement isomorphe à A et nous pouvons identifier ces deux espaces boréliens standards : notons alors $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{G^g}$ la limite inductive de G^g sur A . Tout groupoïde borélien \mathcal{G}_P associé au sommet P de G^g induit un sous-groupoïde partiel de \mathcal{G} sur une partie borélienne X_P de A : notons $\mathcal{G}/\mathcal{G}_P$ le $\mathcal{G}|_{\overline{X_P}}$ -espace fibré standard associé à $(\mathcal{G}|_{\overline{X_P}}, \mathcal{G}_P)$ où $\overline{X_P}$ désigne le \mathcal{G} -saturé de X_P , et de même pour les groupoïdes boréliens associés aux arêtes de G^g . Puisque les groupoïdes boréliens associés aux arêtes de G^g s'injectent dans les groupoïdes boréliens associés aux sommets correspondants, on en déduit des morphismes de \mathcal{G} -espaces fibrés standards. On construit ainsi un \mathcal{G} -champ de graphes borélien \mathcal{A} sur A contenant \mathcal{A}^{ip} comme sous-arboretum, les sommets de ce dernier étant constitués par les images dans \mathcal{A} des sections diagonales d_P des $\mathcal{G}/\mathcal{G}_P$ (idem pour les arêtes).

La seule chose qui reste à voir, c'est que les fibres de \mathcal{A} sont des arbres, c'est-à-dire que \mathcal{A} est un \mathcal{G} -arboretum. Par récurrence sur le nombre n de sommets, démontrons ce fait dans le cas où G^g est un arbre de groupoïdes fini; le résultat s'étend des arbres de groupoïdes fini au cas général en remarquant que la limite inductive d'un arbre de groupoïdes coïncide avec la limite inductive d'un arbre de groupoïdes dont les sommets sont les entiers naturels et dont chaque groupoïde borélien associé à un sommet s'injecte comme sous-groupoïde partiel dans le groupoïde borélien associé au sommet suivant. Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Désignons par P un sommet terminal de l'arbre fini sous-jacent à G^g : l'arbre de groupoïdes enraciné G^g est donc composé de l'arbre de groupoïdes G'^g naturellement enraciné par G^g dont la limite inductive est notée \mathcal{G}' , du sommet terminal P

portant le groupoïde borélien \mathcal{G}_P et d'une paire d'arêtes (a, \bar{a}) portant le groupoïde borélien \mathcal{G}_a . Il est alors clair que

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \star_{\mathcal{G}_a} \mathcal{G}_P.$$

Considérons ensuite l'action de \mathcal{G}' sur $\mathcal{A}^{ip} \subset \mathcal{A}$: l'image $\mathcal{G}' \cdot \mathcal{A}^{ip}$ est un sous-champ de graphes borélien de \mathcal{A} (éventuellement défini sur une partie borélienne de \mathcal{A}) qui est exactement le \mathcal{G}' -champ de graphes borélien \mathcal{A}' associé à \mathcal{G}' : par récurrence c'est un arboretum. Enfin, contractons le champ de graphes borélien \mathcal{A} suivant les sous-arbres $\mathcal{G}' \cdot \mathcal{A}^{ip}$ dans chaque fibre et prolongeons cette opération par \mathcal{G} -équivariance. On obtient un \mathcal{G} -champ de graphes borélien \mathcal{B} possédant une section partielle d'arêtes (provenant de l'arête a) dont l'image est un domaine complet de l'action de \mathcal{G} sur l'espace des arêtes \mathcal{B}^1 et dont les sommets origines et terminaux induisent une partition en deux parties boréliennes de l'espace des sommets \mathcal{B}^0 (notons que la section de sommets terminaux ainsi définie est en fait -une restriction de- la section partielle d_P).

Nous avons démontré dans le cas particulier de groupoïdes boréliens principaux (cf. [Alv08]) que \mathcal{B} est alors l'arboretum associé à $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \star_{\mathcal{G}_a} \mathcal{G}_P$ et c'est bien un arboretum (le résultat s'étend des relations d'équivalence boréliennes au cas général des groupoïdes boréliens sans difficulté supplémentaire). Finalement si \mathcal{B} est un arboretum, il en est de même de \mathcal{A} . \square

Soit \mathcal{A} un \mathcal{G} -champ de graphes borélien connexes où \mathcal{G} est un groupoïde borélien sur X . On suppose que l'espace quotient singulier $\mathcal{G} \backslash \mathcal{A}$ se désingularise en un arbre de groupoïdes G^g . Notons \mathcal{A}_{G^g} l'arboretum (défini sur l'espace borélien standard associé à la racine de G^g et qui s'identifie via la projection de \mathcal{A} dans X à une partie borélienne A de X) obtenu dans le théorème précédent et sur lequel \mathcal{G}_{G^g} agit. On se ramène au cas où $A = X$, quitte à considérer la restriction de \mathcal{G} à X . Rappelons que ψ est le morphisme de groupoïdes boréliens de \mathcal{G}_{G^g} dans $\mathcal{G}|_A$ et notons $\tilde{\psi}$ le morphisme de champ de graphes boréliens sur A du \mathcal{G}_{G^g} -arboretum donné par le théorème précédent dans le \mathcal{G} -champ de graphes borélien \mathcal{A} .

Théorème 43. *Sous les hypothèses précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) \mathcal{A} est un arboretum ;
- ii) $\tilde{\psi}$ est un isomorphisme ;
- iii) ψ est un isomorphisme.

Démonstration : iii) \implies ii) et ii) \implies i) sont clairs d'après le théorème précédent (cf. unicité et \mathcal{A}_{G^g} qui est un arboretum).

iii) \implies ii) Le fait que ψ soit injectif assure que $\tilde{\psi}$ soit localement injectif (c'est-à-dire injectif au voisinage de chaque sommet) d'un arboretum dans un champ de graphes borélien connexes. Donc $\tilde{\psi}$ est injectif.

ii) \implies iii) ψ envoie \mathcal{G}_P sur \mathcal{G}_P (et induit un isomorphisme). Donc le noyau isotrope de ψ est trivial et la surjectivité de ψ est une conséquence du lemme suivant. \square

Soit \mathcal{A} un \mathcal{G} -champ de graphes borélien connexes où \mathcal{G} est un groupoïde borélien sur X .

Lemme 44. *Étant donné un arboretum de représentants dans \mathcal{A} et un sous-champ de graphes de \mathcal{A} contenant l'arboretum de représentants et dont chaque arête dans la fibre d'un élément x de X a au moins une de ses extrémités dans cet arboretum de représentants, considérons les stabilisateurs des sections partielles de sommets induites par l'arboretum de représentants ainsi qu'une partie borélienne de \mathcal{G} dont les éléments agissent en envoyant les sommets du sous-champ de graphes n'appartenant pas à l'arboretum de représentants dans cet arboretum. La réunion de ces sous-groupoïdes partiels de \mathcal{G} et de cette partie borélienne de \mathcal{G} engendrent \mathcal{G} .*

Remarque : Dans le cas où $\mathcal{G} \backslash \mathcal{A}$ se désingularise en un arbre de groupoïdes G^g , on peut prendre la partie borélienne ci-dessus vide. Dans ce cas, le morphisme naturel de $\psi : \mathcal{G}_{G^g} \longrightarrow \mathcal{G}$ est surjectif.

2.2 Cas général d'un graphe de groupoïdes

Nous allons généraliser la notion de limite inductive d'un arbre de groupoïdes (cf. p. 16) et définir le *groupoïde fondamental borélien* d'un graphe de groupoïdes.

Soit G^g est un graphe de groupoïdes orienté (c'est-à-dire de graphe sous-jacent G orienté) et A_m^g l'arbre de groupoïdes induit par G^g sur un sous-arbre maximal enraciné A_m de G . Rappelons

que, via le foncteur d'oubli, l'arbre d'isomorphismes partiels A_m^{ip} définit une relation d'équivalence borélienne lisse dont un domaine fondamental est l'espace borélien standard X porté par la racine de A_m .

Définition 45. *Le groupoïde fondamental borélien $\pi_1(G^g, A_m^g)$ d'un couple (G^g, A_m^g) comme ci-dessus est le groupoïde borélien sur X engendré par les injections dans X via l'arbre maximal A_m des groupoïdes boréliens portés par les sommets de G^g ainsi que par les injections (dans X via A_m) des isomorphismes partiels ϕ portés par les arêtes de G^g , et assujettis aux relations $\phi = Id|_{A_\phi}$ pour tout isomorphisme partiel $\phi : A_\phi \subset X \longrightarrow B_\phi \subset X$ porté par une arête de A_m et*

$$(x, \phi(x)) \cdot \gamma^a \cdot (\phi(y), y) \cdot (\gamma^{\bar{a}})^{-1} = id_x,$$

pour tout isomorphisme partiel $\phi : A_\phi \subset X \longrightarrow B_\phi \subset X$ porté par une arête a de G et tout élément γ du groupoïde borélien porté par a de source $\phi(x)$ et de but $\phi(y)$, où x et y appartiennent à A_ϕ .

Remarque : Dans le cas d'un arbre de groupoïdes (c'est-à-dire $G = A_m$), le groupoïde fondamental borélien est, par définition, canoniquement isomorphe à la limite inductive (cf. prop. 39) de cet arbre de groupoïdes.

Nous en venons au résultat principal de cette partie qui donne la structure de tout groupoïde borélien agissant sur un arboretum.

Théorème 46. *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien agissant sans inversion sur un arboretum sur X . Alors \mathcal{G} est stablement isomorphe au groupoïde fondamental borélien d'un certain graphe de groupoïdes.*

L'idée de la démonstration est la même que dans le cas particulier que nous avons traité dans le paragraphe précédent où la désingularisation était un arbre de groupoïdes. À la donnée d'un graphe de groupoïdes G^g et d'un sous-arbre maximal enraciné de groupoïdes A_m^g , on associe un arboretum sur la racine de A_m^g sur lequel le groupoïde fondamental borélien $\pi_1(G^g, A_m^g)$ agit de telle sorte que G^g soit une désingularisation de cette action. Ainsi, étant donné l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A} et G^g , on en déduit un morphisme de groupoïdes boréliens

$$\psi : \pi_1(G^g, A_m^g) \longrightarrow \mathcal{G}|_{\mathcal{A}}$$

qui est en fait un isomorphisme, où \mathcal{A} est le domaine de définition de la section partielle de sommets correspondant à la représentation de l'espace borélien standard associé à la racine de A_m^g . Comme dans le cas d'un arbre de groupoïdes, on peut démontrer le résultat d'existence suivant :

Proposition 47. *Soit G^g est un graphe de groupoïdes orienté (c'est-à-dire de graphe sous-jacent G orienté) et A_m^g l'arbre de groupoïdes induit par G^g sur un sous-arbre maximal enraciné A_m de G dont on désigne par X l'espace borélien standard porté par la racine de A_m . Alors il existe une unique (à unique isomorphisme près) arboretum \mathcal{A} sur X contenant \mathcal{A}^{ip} et sur lequel $\pi_1(G^g, A_m^g)$ agit de telle sorte que G^g soit une désingularisation (via \mathcal{A}^{ip}) de l'espace quotient singulier $\mathcal{G} \setminus \mathcal{A}$.*

Soit \mathcal{A} un \mathcal{G} -champ de graphes borélien connexes où \mathcal{G} est un groupoïde borélien sur X . On désigne par (G^g, A_m^g) une désingularisation de l'espace quotient singulier $\mathcal{G} \setminus \mathcal{A}$. Notons $\mathcal{A}_{A_m^g}$ l'arboretum (défini sur l'espace borélien standard associé à la racine de A_m^g et qui s'identifie via la projection de \mathcal{A} dans X à une partie borélienne A de X) donné par le théorème précédent et sur lequel $\pi_1(G^g, A_m^g)$ agit. Quitte à considérer la restriction $\mathcal{A}|_A$ de \mathcal{A} à A , on se ramène au cas où $A = X$. Rappelons que ψ est le morphisme de groupoïdes boréliens de $\pi_1(G^g, A_m^g)$ dans $\mathcal{G}|_{\mathcal{A}}$ et notons $\tilde{\psi}$ le morphisme de champ de graphes boréliens sur X du $\pi_1(G^g, A_m^g)$ -arboretum donné par la proposition précédente dans le \mathcal{G} -champ de graphes borélien \mathcal{A} .

Théorème 48. *Sous les hypothèses précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) \mathcal{A} est un arboretum ;
- ii) $\tilde{\psi}$ est un isomorphisme ;
- iii) ψ est un isomorphisme.

Références

- [Alv08] A. ALVAREZ – « Théorème de Kurosh pour les relations d'équivalence boréliennes », prépublication (2008).
- [AG] A. ALVAREZ et D. GABORIAU – « Free products, Orbit Equivalence and Measure Equivalence Rigidity », prépublication (2008).
- [Con79] A. CONNES – « Sur la théorie non commutative de l'intégration », Algèbres d'opérateurs (Sém. Les Plans-sur-Bex, 1978), Lecture Notes in Math. **725**, Springer, Berlin, (1979), 19–143.
- [Gab00] D. GABORIAU – « Coût des relations d'équivalence et des groupes », *Invent. Math.* **139** (2000), 41–98.
- [Gab02] — , « Invariants l^2 de relations d'équivalence et de groupes », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **95** (2002), 93–150.
- [Kec95] A. S. KECHRIS – *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag, New York (1995).
- [KM04] A. S. KECHRIS et B. D. MILLER – *Topics in orbit equivalence*, Lecture Notes in Math. **1852**, Springer-Verlag, Berlin (2004).
- [KMS76] A. KARRASS, W. MAGNUS et D. SOLITAR – *Combinatorial group theory*, Dover Publications Inc., New York (1976).
- [Kur66] K. KURATOWSKI – *Topology. Vol. I*, Academic Press, New York (1966).
- [Lev95] G. LEVITT – « On the cost of generating an equivalence relation », *Erg. Th. Dyn. Syst.* **15** (1995), 1173–1181.
- [SW79] P. SCOTT et T. WALL – « Topological methods in group theory », Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977), London Math. Soc. Lecture Note Ser. **36** (1979), 137–203.
- [Ser77] J.-P. SERRE – *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque **46**, Soc. Math. de France, Paris (1977).