

Arborabilité et revêtements boréliens

Aurélien Alvarez

aurelien.alvarez@univ-orleans.fr

Les groupoïdes boréliens libres et les relations d'équivalence boréliennes arborables jouent un rôle analogue aux groupes libres $F(S)$ sur un ensemble S et la théorie des revêtements boréliens que nous avons développée donne un dictionnaire semblable à celui donné par la théorie des revêtements du bouquet de cercles indexé par S . Le contexte des groupoïdes boréliens (principaux) présente une particularité nouvelle en ceci qu'on est amené à considérer des conjugaisons à isomorphisme (équivalence orbitale) stable près. La théorie des revêtements permet de démontrer simplement et de manière très élégante des résultats de nature algébrique (par exemple pour le groupe libre) et nous montrons que de telles applications sont envisageables dans le contexte des groupoïdes boréliens. Les techniques que nous utilisons sont principalement développées dans [Alv08a] et [Alv08b].

Rappelons qu'une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur X définit canoniquement un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X via la projection π_l . Supposons que \mathcal{R} soit arborable et désignons par Φ un (L-)arborage de \mathcal{R} . Dans ce cas, les fibres de l'espace fibré standard canonique gauche sont naturellement munies d'une structure d'arbre : les \mathcal{R} -arboretums sont au cœur des articles [Alv08a] et [Alv08b].

Définition 1 (\mathcal{R} -arboretum). *Un \mathcal{R} -champ de graphes borélien (\mathcal{A}, π) sur X est un graphe dont les espaces de sommets et d'arêtes sont des \mathcal{R} -espaces fibrés standards (\mathcal{A}^0, π^0) et (\mathcal{A}^1, π^1) sur X et tel que les applications sommet origine $o : \mathcal{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}^0$, sommet terminal $t : \mathcal{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}^0$ et arête opposée $\bar{\cdot} : \mathcal{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}^1$ soient des morphismes de \mathcal{R} -espaces fibrés standards.*

La fibre dans \mathcal{A} d'un élément de x , notée \mathcal{A}_x , est le sous-graphe d'ensemble de sommets $(\pi^0)^{-1}(x)$ et d'ensemble d'arêtes $(\pi^1)^{-1}(x)$. Si \mathcal{A}_x est un arbre pour tout x de X , nous dirons que (\mathcal{A}, π) est un \mathcal{R} -arboretum.

Remarque : Les définitions précédentes dans le cas de la relation d'équivalence borélienne à classes triviales sur X permettent de définir les notions de *champ de graphes borélien* et d'*arboretum* sur X .

Exemple fondamental : Tout graphage Φ ([KM04]) sur X définit un \mathcal{R}_Φ -champ de graphes borélien sur X où \mathcal{R}_Φ est la relation d'équivalence borélienne engendrée par Φ . L'espace des sommets est le \mathcal{R}_Φ -espace fibré standard canonique gauche et \mathcal{R}_Φ agit naturellement sur l'espace des arêtes défini par le graphage Φ : l'image par le couple d'éléments \mathcal{R}_Φ -équivalents (x', x) de l'arête $(y, z)_x$ dans la fibre de x est l'arête $(y, z)_{x'}$ dans la fibre de x' . Notons que l'action est, par définition, lisse sur l'espace des sommets et que la projection π_r de l'espace des sommets dans X est invariante sous l'action de \mathcal{R}_Φ . Si Φ est un arborage, nous désignerons par (\mathcal{A}_Φ, π) le \mathcal{R}_Φ -arboretum canonique associé à Φ sur X ci-dessus.

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne arborable sur X et Φ un L-arborage de \mathcal{R} . Désignons par (\mathcal{A}_Φ, π) le \mathcal{R} -arboretum canonique gauche sur X et par G_Φ le graphe borélien naturellement associé à Φ (cf. ex. suivant déf. 5). L'espace des sommets G_Φ^0 de G_Φ est X et l'espace des sommets $(\mathcal{A}_\Phi^0, \pi^0)$ de (\mathcal{A}_Φ, π) est quant à lui l'espace fibré standard canonique gauche (\mathcal{R}, π_l) . La projection $\pi_r : \mathcal{R} \rightarrow X$ se prolonge naturellement en un morphisme de graphes boréliens de \mathcal{A}_Φ sur G_Φ . De plus, pour tout élément x de X , on remarque que l'image réciproque par π_r de l'étoile E_x de x dans G_Φ est la réunion disjointe des étoiles en chaque élément de $\pi_r^{-1}(x)$ dans le graphe borélien \mathcal{A}_Φ et que π_r induit un isomorphisme de graphes entre chacune de ces étoiles et E_x . Nous allons définir les notions de *graphe borélien fibré sur X* (déf. 5), de *groupoïde fondamental borélien* (déf. 11) et de *revêtement borélien* d'un graphe borélien (déf. 15). Nous nous intéresserons plus particulièrement au

cas des *bouquets de cercles boréliens* pour lesquels nous expliciterons une correspondance bijective entre les sous-groupeïdes de son groupeïde fondamental borélien définis à conjugaison stable près et ses revêtements boréliens *homogènes* définis à isomorphisme près (th. 19).

Remerciements : Je tiens à remercier sincèrement Damien Gaboriau pour son encouragement tout au long de ce travail ainsi que Frédéric Paulin pour tout le soin qu'il a accordé à une première version de ce texte.

Dans la suite, le couple (X, \mathcal{B}_X) désigne toujours un espace borélien standard et \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables sur X .

Un *espace fibré standard* (F, \mathcal{B}_F, π) est la donnée d'un espace borélien standard F sur X et d'une application borélienne (appelée projection) $\pi : F \rightarrow X$ surjective à pré-images dénombrables. La fibre F_x d'un élément x de X est la pré-image de x par π . Comme sous-ensemble borélien de $X \times X$, la relation \mathcal{R} définit naturellement deux espaces fibrés standards sur X via les projections π_l et π_r respectivement sur la première et deuxième coordonnée. Une *section borélienne* s de F est une application borélienne de X dans F telle que $\pi \circ s$ soit égale à l'identité. Si A est une partie borélienne de X et si s n'est définie que sur A , alors nous parlerons de *section partielle*. Un espace fibré standard sur X admet toujours une section borélienne. Ceci est une conséquence du théorème suivant (voir [Kur66], [Kec95]) :

Théorème 2 (Théorème de sélection). *Soit F un espace fibré standard sur X . Alors il existe une famille dénombrable de sections partielles de X dont les images forment une partition (borélienne et dénombrable) de F . De plus, on peut toujours supposer qu'au moins l'une de ces sections partielles est une section borélienne, c'est-à-dire définie sur X tout entier.*

Rappelons à présent les définitions de graphe borélien et de morphisme de graphes boréliens.

Définition 3 (Graphe borélien). *Un graphe borélien G est un graphe localement dénombrable (c'est-à-dire que chaque sommet n'a qu'un nombre dénombrable de sommets voisins) dont les ensembles de sommets G^0 et d'arêtes G^1 sont des espaces boréliens standards et tel que les applications sommet origine o , sommet terminal t et arête opposée $\bar{}$ soient des applications boréliennes.*

On rappelle que si x un sommet d'un graphe G , l'étoile de x est le graphe « local » en x déduit de G . Plus précisément, soit Gra un graphe et x un sommet de Gra . Si a est une arête de Gra de sommets origine et terminal x , l'éclatement de a est une arête de sommet origine x et de sommet terminal une copie x_a du sommet x . L'étoile de x est le graphe dont l'ensemble des sommets est constitué de x , des sommets adjacents à x dans G et des sommets x_a pour toute arête a de sommets origine et terminal x , et dont l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de G dont une et une seule des extrémités est x ainsi que des éclatements des arêtes a de sommets origine et terminal x .

Définition 4. *Un morphisme de graphes boréliens est un morphisme de graphes tel que les applications sous-jacentes entre espaces de sommets et d'arêtes soient boréliennes et à fibres dénombrables.*

Remarque : Un graphe borélien G induit naturellement une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_G sur l'espace des sommets G^0 , chaque classe de \mathcal{R}_G étant canoniquement munie d'une structure de graphe connexe, son *graphe de Cayley*.

Exemple : Un arboretum sur X possède une structure canonique de graphe borélien. Plus généralement, un champ de graphes borélien sur X définit un graphe borélien. Un morphisme de champs de graphes boréliens induit un morphisme de graphes boréliens entre les graphes boréliens canoniquement associés.

Deux cas particuliers de graphes boréliens vont particulièrement nous intéresser : ce sont les graphes boréliens dont l'espace des sommets est X et, plus généralement, ceux dont l'espace des sommets est un espace fibré standard sur X .

Définition 5 (Bouquet de cercles et graphe borélien fibré sur X). *Un bouquet de cercles borélien sur X est un graphe borélien G dont l'espace des sommets G^0 est X . Un graphe borélien fibré sur X est un graphe borélien G dont l'espace des sommets G^0 est un espace fibré standard sur X .*

Exemple : Étant donné un L-graphage $\Phi = (\phi : A_i \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ sur X , on définit un bouquet de cercles borélien G_Φ sur X dont l'espace des arêtes orientées G_Φ^1 est la réunion disjointe des A_i . L'origine de toute arête (i, x) de G_Φ^1 est par définition l'élément x de X et son sommet terminal $\phi_i(x)$. De la même façon, étant donné une partie génératrice (\mathcal{S}, s, r) sur X (cf. [Alv08b]), on définit canoniquement un bouquet de cercles borélien $G_\mathcal{S}$ sur X dont l'espace des arêtes orientées $G_\mathcal{S}^1$ est \mathcal{S} , les sommets origine et terminal d'une arête σ de $G_\mathcal{S}^1$ étant $s(\sigma)$ et $r(\sigma)$.

Un graphe borélien fibré G sur X est *homogène* s'il existe une section borélienne *saturante* de G^0 , c'est-à-dire dont l'image rencontre toutes les classes de la relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_G : un graphe borélien *enraciné* (G, s) sur X est la donnée d'un graphe borélien fibré homogène G sur X et d'une telle section borélienne s appelée *racine* de G .

Nous allons à présent introduire la notion d'espace fibré standard *uniformément fini*.

Définition 6 (Espace fibré standard uniformément fini). *La valence d'un espace fibré standard (F, π) sur X est l'application borélienne $v : X \longrightarrow \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$ qui, à un élément x de X , associe le cardinal de $\pi^{-1}(x)$. L'espace fibré standard (F, π) sur X est dit *uniformément fini* si v est une application borélienne bornée.*

Autrement dit, un espace fibré standard (F, π) sur X est uniformément fini si et seulement s'il existe une famille finie de sections partielles de F dont les images recouvrent F .

Remarque : Notons qu'un espace fibré standard uniformément fini est en particulier à fibres finies mais qu'il s'agit d'une condition plus restrictive.

Une sous-relation \mathcal{S} définie sur un domaine complet A d'une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur X est d'*indice fini* si, pour tout élément x de A , la $\mathcal{R}|_A$ -classe de x est la réunion disjointe d'un nombre fini de \mathcal{S} -classes. Si \mathcal{G} est un groupoïde borélien sur X , on appelle \mathcal{G} -classe à gauche (resp. à droite) d'un élément x de X l'ensemble des éléments de \mathcal{G} de source (resp. de but) x : une \mathcal{G} -classe à gauche (resp. à droite) est alors la réunion de \mathcal{G} -classes à gauche (resp. à droite) d'éléments $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ -équivalents de X . Notons que les \mathcal{G} -classes à droite et à gauche sont en bijection canonique puisque la source d'un élément γ de \mathcal{G} est le but de γ^{-1} .

Définition 7 (Indice fini). *Un sous-groupoïde \mathcal{H} défini sur un domaine complet A d'un groupoïde borélien \mathcal{G} sur X est d'*indice fini* si, pour tout élément x de A , la \mathcal{G} -classe (à gauche) de x est la réunion disjointe d'un nombre fini de \mathcal{H} -classes (à gauche). Nous dirons que \mathcal{H} est *uniformément d'indice fini* s'il existe un entier non nul N tel que le nombre de \mathcal{H} -classes contenues dans toute \mathcal{G} -classe est inférieur à N .*

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des définitions.

Lemme 8. *L'espace fibré standard $(\mathcal{G}/\mathcal{H}, d)$ sur X (cf. [Alv08b]) est à fibres finies si et seulement si \mathcal{H} est un sous-groupoïde de \mathcal{G} d'indice fini défini sur X . L'espace fibré standard $(\mathcal{G}/\mathcal{H}, d)$ sur X est *uniformément fini* si et seulement si \mathcal{H} est *uniformément d'indice fini* dans \mathcal{G} . \square*

Rappelons qu'un graphage Gr sur X est une partie borélienne symétrique de $X \times X$, localement dénombrable et qui ne rencontre pas la diagonale. La restriction à Gr de la projection $\pi_l : X \times X \longrightarrow X$ sur le premier facteur étant à fibres dénombrables, $\pi_l^{-1}(\pi_l(Gr))$ est un espace fibré standard sur $\pi_l(Gr)$. En prolongeant par 0 sa valence sur le complémentaire de $\pi_l(Gr)$ dans X , on obtient une application borélienne $v : X \longrightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Nous dirons que v est la *valence* du graphage Gr .

Un graphage sur X est *uniformément de rang fini* si sa valence est une fonction borélienne bornée. Plus généralement, si (\mathcal{S}, s, r) est une partie génératrice sur X , \mathcal{S} est *uniformément de rang fini* si les valences des espaces fibrés standards (\mathcal{S}, s) sur $s(\mathcal{S})$ et (\mathcal{S}, r) sur $r(\mathcal{S})$ sont bornées.

Définition 9. *Un groupoïde borélien \mathcal{G} sur X est *uniformément de rang fini* s'il existe une partie génératrice \mathcal{S} de \mathcal{G} uniformément de rang fini. En particulier, une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur X est *uniformément de rang fini* s'il existe un graphage de \mathcal{R} uniformément de rang fini.*

On déduit directement des définitions et du théorème de sélection qu'un groupoïde borélien sur X (en particulier une relation d'équivalence borélienne) est uniformément de rang fini si et seulement s'il existe un L-graphage de cardinal fini.

Exemple : Si Γ est un groupe de rang fini qui agit sur X par automorphismes boréliens, alors \mathcal{G}_Γ est un groupoïde borélien uniformément de rang fini.

Soit (G, π) un graphe borélien fibré sur X . Un couple d'éléments (x, y) de X se *relève* dans G s'il existe une arête de G de sommet origine appartenant à $\pi^{-1}(x)$ et de sommet terminal appartenant à $\pi^{-1}(y)$. Nous dirons qu'un isomorphisme partiel ϕ de X se *relève* dans G s'il existe une application borélienne $\tilde{\phi}$ définie sur le graphe de ϕ et à valeurs dans G^1 telle que, pour tout x dans la source de ϕ , $\tilde{\phi}(x)$ relève le couple d'éléments $(x, \phi(x))$. En particulier, le relevé $\tilde{\phi}$ d'un isomorphisme partiel ϕ de X dans G définit naturellement une section partielle de sommets sur la source de ϕ et une section partielle de sommets sur le but de ϕ .

Définition 10. *Un graphe borélien fibré (G, π) sur X est uniformément fini si l'espace des sommets est un espace fibré standard uniformément fini et s'il existe un nombre fini d'isomorphismes partiels de X qui se relèvent dans G et tels que leurs images recouvrent l'espace des arêtes G^1 .*

Exemples : Étant donné un entier naturel non nul N , un champ de graphes borélien sur X dont les fibres sont des graphes finis ayant au plus N sommets définit un graphe borélien fibré sur X uniformément fini ; dans ce cas, les isomorphismes partiels de X que l'on relève dans G sont (des restrictions de) l'identité. Le bouquet de cercles borélien sur X associé à un L-graphage (cf. ex. suivant déf. 5) uniformément de rang fini est uniformément fini (en tant que graphe borélien fibré sur X).

Introduisons à présent la notion de *groupoïde fondamental borélien* pour un graphe borélien enraciné sur X . Dans le cas où l'espace X est un singleton, on retrouve la notion de *groupe fondamental* pour un graphe connexe enraciné.

Définition 11 (Groupoïde fondamental borélien). *Soit (G, s) un graphe borélien enraciné sur X . Le groupoïde fondamental borélien $\pi^1(G, s)$ de (G, s) est le groupoïde dont l'espace des unités est $s(X)$ et dont les morphismes sont les chemins réduits (c'est-à-dire sans aller-retour) dans G dont les extrémités appartiennent à $s(X)$.*

Remarque : $\pi^1(G, s)$ est bien un groupoïde borélien sur X , la structure d'espace borélien standard sur l'ensemble des morphismes étant déduite de celle de l'espace des arêtes G^1 de G et de la régularité borélienne des applications sommet origine et sommet terminal.

Exemple : Le groupoïde fondamental borélien d'un bouquet de cercles borélien associé à une partie génératrice \mathcal{S} sur X et le groupoïde borélien libre sur \mathcal{S} sont canoniquement isomorphes par définition.

Dans la suite, nous serons également intéressés par la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\pi^1(G, s)}$ sur $s(X)$ induite par $\pi^1(G, s)$. D'autre part, puisque $s : X \rightarrow s(X)$ est un isomorphisme borélien, $\pi^1(G, s)$ et son groupoïde principal associé donnent (par isomorphisme) un groupoïde borélien et une relation d'équivalence borélienne sur X . Dans la suite, il nous arrivera de dire que $\pi^1(G, s)$ est un groupoïde borélien sur X .

Proposition 12. *Soit G un graphe borélien homogène sur X . Soit s et s' deux sections boréliennes de sommets saturantes. Alors les groupoïdes boréliens $\pi^1(G, s)$ et $\pi^1(G, s')$ sont stablement isomorphes, c'est-à-dire qu'il existe des parties boréliennes A et A' de X telles que les restrictions $\pi^1(G, s)|_A$ et $\pi^1(G, s')|_{A'}$ soient isomorphes.*

Remarque : Dans le cas où X est un singleton, on retrouve le fait que le groupe fondamental d'un graphe connexe est bien défini à isomorphisme près.

Démonstration : Puisque s et s' sont deux sections boréliennes de sommets saturantes, pour tout point x de X , il existe un élément x' de X et un chemin dans G reliant le sommet $s(x)$ au sommet $s'(x')$. On déduit du théorème de sélection l'existence d'un isomorphisme partiel $\phi : A \rightarrow A'$ de X tel que ϕ soit une équivalence orbitale entre les relations d'équivalence boréliennes $\mathcal{R}_{\pi^1(G, s)}$

et $\mathcal{R}_{\pi^1(G,s')}$ induites par les groupoïdes boréliens $\pi^1(G,s)$ et $\pi^1(G,s')$ et tel que tout point $s(x)$ de $s(A)$ soit relié par un chemin au point $s(\phi(x))$ de $s(A')$, où A (et donc A') désigne un domaine complet de $\mathcal{R}_{\pi^1(G,s)}$ (resp. $\mathcal{R}_{\pi^1(G,s')}$). L'isomorphisme partiel ϕ induit alors un isomorphisme de groupoïdes boréliens entre $\pi^1(G,s)|_A$ et $\pi^1(G,s')|_{A'}$: à tout chemin c dans G d'origine $s(x)$ et d'extrémité $s(y)$ où x et y appartiennent à A , est associé le chemin $\phi \circ \phi^{-1}$ d'origine $s'(\phi(x))$ et d'extrémité $s'(\phi(y))$. \square

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, le groupoïde fondamental borélien associé à un bouquet de cercles borélien sur X est isomorphe au groupoïde borélien libre sur l'espace des arêtes du bouquet. C'est un fait général aux graphes boréliens enracinés sur X . Ce résultat généralise aux groupoïdes boréliens enracinés sur X le fait que le groupe fondamental d'un graphe connexe (cas où X est un singleton) est un groupe libre.

Proposition 13. *Soit (G,s) un graphe borélien enraciné sur X . Alors le groupoïde fondamental borélien $\pi^1(G,s)$ est un groupoïde borélien libre sur $s(X) \cong X$. Si de plus (G,s) est un graphe borélien uniformément fini sur X , alors $\pi^1(G,s)$ est uniformément de rang fini.*

Démonstration : Nous allons utiliser les techniques de la démonstration du théorème 14 de [Alv08a] afin de construire une forêt borélienne \mathcal{F} dans G telle que chaque composante connexe ne rencontre $s(X)$ qu'en un seul sommet et telle que toute arête de G n'appartenant pas à \mathcal{F} connecte deux composantes connexes (ce qui entraînera que l'espace des sommets de \mathcal{F} coïncide avec G^0). Étant donné une telle forêt borélienne \mathcal{F} , opérons une opération de contraction de G suivant \mathcal{F} . Autrement dit considérons l'espace quotient de G^0 par la relation d'équivalence borélienne lisse de domaine fondamental $s(X)$ dont les classes sont les ensembles de sommets des composantes connexes de \mathcal{F} , ainsi que l'espace quotient de G^1 par la relation d'équivalence borélienne lisse de domaine fondamental naturellement isomorphe à $s(X) \sqcup (G^1 \setminus \mathcal{F}^1)$ dont les classes sont soit les ensembles d'arêtes des composantes connexes de \mathcal{F} , soit les arêtes de $G^1 \setminus \mathcal{F}^1$. On obtient ainsi un bouquet de cercles borélien B sur $s(X) \cong X$ puisque pour toute arête de $G^1 \setminus \mathcal{F}^1$, il correspond un unique chemin dans \mathcal{F} joignant son sommet origine (respectivement terminal) à $s(X)$. Le groupoïde fondamental borélien de (G,s) est donc libre sur la partie génératrice décrite ci-dessus. Si une famille d'isomorphismes partiels de X se relève dans G et recouvre G^1 , alors l'image de cette famille dans le quotient B recouvre encore B . Ainsi, si (G,s) est uniformément fini sur X , il en est de même du rang de $\pi^1(G,s)$.

La construction d'une forêt borélienne \mathcal{F} comme ci-dessus est analogue à la construction d'un arboretum de représentants de la proposition 32 de [Alv08a], avec une étape supplémentaire dans chaque itération de la construction. Notons \mathcal{F}_1 l'image $s(X)$ de la section borélienne s . Pour tout entier naturel $n \geq 1$, ayant construit une forêt borélienne \mathcal{F}_n de G telle que chaque composante connexe ne rencontre $s(X)$ qu'en un seul sommet, la forêt borélienne \mathcal{F}_{n+1} est obtenue à partir de la forêt borélienne \mathcal{F}_n et de sections partielles de sommets $s_{n,1,j_n} : A_{j_n} \subset X \rightarrow S_{n,1}$ et $s_{n,2,k_n} : A_{k_n} \subset X \rightarrow S_{n,2}$, où $S_{n,1}$ désigne l'ensemble des sommets de G à distance 1 de \mathcal{F}_n et ayant un unique voisin dans \mathcal{F}_n , et $S_{n,2}$ le complémentaire de $S_{n,1}$ dans l'ensemble des sommets à distance 1 de \mathcal{F}_n . Les sections partielles $s_{n,1,j_n}$ sont choisies de la même manière que dans la démonstration de la proposition 32 de [Alv08a], après avoir fixé une numérotation borélienne de l'espace des sommets G^0 . Quant aux sections boréliennes $s_{n,2,k_n}$, celles-ci doivent être des applications injectives afin que chaque composante connexe de \mathcal{F}_{n+1} continue de ne rencontrer $s(X)$ qu'en un seul sommet. Pour cela, désignons par $S'_{n,2}$ l'ensemble des sommets de \mathcal{F}_n à distance 1 d'un sommet de $S_{n,2}$: on obtient ainsi un espace fibré standard $S'_{n,2}$ sur $S_{n,2}$ avec une projection borélienne évidente. Étant donné une section borélienne $s'_{n,2} : S_{n,2} \rightarrow S'_{n,2}$ de cet espace fibré standard, découpons $S_{n,2}$ en un nombre dénombrable de parties boréliennes de sorte que chaque $s'_{n,2,k_n}$ (définie sur une partie borélienne de $S_{n,2}$) soit injective (et donc bijective) sur son image. Les sections partielles $s_{n,2,k_n} : A_{k_n} \rightarrow S_{n,2}$ cherchées sont alors les $(s'_{n,2,k_n})^{-1}$, où $A_{k_n} \subset X$ est isomorphe via $\pi^0 : G^0 \rightarrow X$ au but de $s'_{n,2,k_n}$. \square

La démonstration précédente nous incite à poser la définition suivante :

Définition 14 (Cœur). *Soit (G,s) un graphe borélien enraciné sur X . Le cœur de (G,s) est le plus petit sous-graphe de G contenant tous les chemins réduits de G dont les extrémités appartiennent à $s(X)$.*

En particulier, il n'est pas difficile de voir que le cœur d'un graphe borélien sur X est encore un graphe borélien sur X .

Exemple : Si G est un bouquet de cercles borélien sur X , alors le cœur de G est exactement G . Le cœur d'un arboretum sur X est le graphe borélien vide. Plus généralement, le cœur d'un champ de graphes connexes borélien \mathcal{A} est le champ de graphes boréliens dont les fibres sont les cœurs des fibres de \mathcal{A} .

Remarque : C'est une conséquence de la démonstration de la proposition précédente que si le cœur d'un graphe borélien enraciné (G, s) sur X contient l'image $s(X)$ de la racine et est uniformément fini, alors le groupoïde borélien fondamental $\pi^1(G, s)$ de G est uniformément de rang fini.

Nous allons maintenant définir la catégorie des *revêtements boréliens* au-dessus d'un graphe borélien G .

Définition 15 (Revêtement borélien). *Soit G un graphe borélien. Un revêtement borélien de (G', p') de G est un morphisme de graphes boréliens de G' dans G tel que la projection $p' : G' \rightarrow G$ soit un revêtement de graphes.*

Ainsi, si G' est un revêtement de G , l'image réciproque par la projection p du graphe de Cayley d'un élément de G^0 est une réunion disjointe de graphes de Cayley d'éléments de G'^0 telle qu'en restriction à chaque composante connexe, la projection p soit un revêtement de graphes connexes.

Définition 16 (Morphisme de revêtements). *Un morphisme de revêtements boréliens f de G est un morphisme de graphes boréliens tel que $f : G' \rightarrow G''$ soit un morphisme de revêtements de graphes de G .*

Remarque : Un morphisme de revêtements boréliens $f : G' \rightarrow G''$ induit un morphisme de revêtements de graphes du graphe de Cayley d'un élément x de G'^0 dans le graphe de Cayley de $f(x)$ dans G''^0 .

Étant donné un revêtement borélien G' de G , l'application « identité » est un morphisme de revêtements de G' dans lui-même. Si $f : G' \rightarrow G''$ et $f' : G'' \rightarrow G'''$ sont des morphismes de revêtements boréliens de G , alors il en est de même de $f' \circ f$. On définit ainsi la catégorie des revêtements boréliens au-dessus d'un graphe borélien G donné. On en déduit notamment la notion d'isomorphisme de revêtements boréliens.

Remarque : Si D est un ensemble dénombrable (par exemple fini), la projection sur le premier facteur $G \times D \rightarrow G$ est un revêtement borélien du graphe borélien G : un tel revêtement est dit trivial.

Nous allons maintenant reprendre l'exemple des relations d'équivalence boréliennes arborables sur X décrit au début de ce chapitre et le généraliser au cas des groupoïdes boréliens libres.

Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien libre sur X dont on note \mathcal{S} une partie génératrice et libre. Désignons par $G_{\mathcal{S}}$ le bouquet de cercles borélien sur X induit par \mathcal{S} (cf. ex. suivant déf. 5) : on rappelle que son groupoïde borélien fondamental sur X est canoniquement isomorphe à \mathcal{G} par définition. Soit $(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}, \pi)$ le \mathcal{G} -arboretum canonique sur X associé à \mathcal{S} (cf. [Alv08b]) dont l'espace des sommets $(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^0, \pi^0)$ est l'espace fibré standard canonique gauche (\mathcal{G}, s) . L'action de \mathcal{G} sur $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ étant quasi-libre, notons $p_{\mathcal{S}} : \mathcal{A}_{\mathcal{S}} \rightarrow G_{\mathcal{S}}$ l'application de passage au quotient, sa restriction $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^0 \rightarrow G_{\mathcal{S}}^0$ aux espaces de sommets étant égale à r . Enfin, par construction $p_{\mathcal{S}}$ est un revêtement borélien de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ sur $G_{\mathcal{S}}$.

Remarque : C'est ici la même situation que pour le groupe libre $F(S)$ sur un ensemble S où $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ joue le rôle de l'arbre de Cayley de $(F(S), S)$ et $G_{\mathcal{S}}$ joue le rôle du bouquet de cercles indexés par S .

Nous allons maintenant démontrer que l'application Ξ qui, à la classe de conjugaison stable d'un sous-groupoïde \mathcal{H} de $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$, associe la classe d'isomorphisme du revêtement homogène $\mathcal{H} \setminus \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ de $G_{\mathcal{S}}$ est une bijection.

Définition 17 (Revêtements homogènes). *Un revêtement pointé (G', G^0) d'un graphe borélien G est la donnée d'un revêtement borélien (G', p') de G et d'une section borélienne de l'espace fibré standard $G'^0 \rightarrow G^0$ appelée relèvement de G^0 dans G'^0 . Un revêtement pointé (G', G^0) est homogène si le relèvement de G^0 dans G'^0 est de plus un domaine complet de $\mathcal{R}_{G'}$: un tel relèvement est dit saturant.*

Remarque : L'existence d'un relèvement de G^0 dans G'^0 est bien sûr une conséquence du fait que G'^0 soit un espace fibré standard sur G^0 . Le graphe borélien G est appelé la *base* du revêtement et nous allons être particulièrement intéressé par le cas où la base du revêtement est un graphe borélien sur X .

Soit un revêtement homogène (G', p', G^0) d'un graphe borélien G dont on note s le relèvement de G^0 dans G'^0 . Notons que, par définition d'un revêtement, p' induit un isomorphisme entre l'étoile de x et l'étoile de $p'(x)$ pour tout x de G'^0 : la projection p' se prolonge donc en un morphisme de groupoïdes boréliens

$$\overline{p'} : \pi^1(G', s(G^0)) \longrightarrow \pi^1(G, G^0)$$

entre les groupoïdes boréliens fondamentaux de (G', G^0) et (G, G^0) , et ce dernier est injectif car l'image d'un chemin non trivial de G' d'extrémités dans $s(G^0)$ par un tel morphisme est un chemin non trivial de G d'extrémités dans G^0 . De plus, remarquons qu'un tel revêtement induit une action du groupoïde borélien fondamental $\pi^1(G, G^0)$ sur l'espace fibré standard $p'^0 : G'^0 \longrightarrow G^0$, ce qui est une conséquence immédiate de la définition d'un revêtement.

Exemple : Si \mathcal{H} est un sous-groupoïde de \mathcal{G}_S où S est une partie génératrice et libre de \mathcal{G}_S sur X , le graphe borélien $\mathcal{H} \setminus \mathcal{A}_S$ est un revêtement homogène de G_S puisque l'espace quotient de l'action de \mathcal{H} sur l'espace des sommets \mathcal{A}_S^0 n'est autre que le (\mathcal{G}, π_r) -espace fibré standard homogène $\mathcal{H} \setminus \mathcal{G}$ dont la diagonale $d_{\mathcal{H}}$ est une section borélienne saturante de stabilisateur égal à \mathcal{H} .

Nous allons maintenant démontrer que l'application qui, à un sous-groupoïde \mathcal{H} défini sur un domaine complet A de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_S}$ où S est une partie génératrice et libre de \mathcal{G}_S sur X , associe le revêtement homogène $\mathcal{H} \setminus \mathcal{A}_{S|_A}$ de G_S déduit par passage au quotient de l'action quasi-libre de \mathcal{H} sur le $\mathcal{G}|_A$ -arboretum $\mathcal{A}_{S|_A}$, induit une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison stable de sous-groupoïdes de \mathcal{G}_S définis sur des domaines complets de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_S}$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements homogènes de G_S .

Lemme 18. *Si \mathcal{H} et \mathcal{H}' sont des sous-groupoïdes de \mathcal{G}_S (définis sur des domaines complets A et A' de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_S}$) stablement conjugués via l'isomorphisme partiel $\phi : B \subset A \longrightarrow B' \subset A'$, alors ϕ induit un isomorphisme de revêtements boréliens de $\mathcal{H} \setminus (\mathcal{A}_S)_{|_B}$ dans $\mathcal{H}' \setminus (\mathcal{A}_S)_{|_{B'}}$. Réciproquement si (G', p', G^0) et (G'', p'', G^0) sont deux revêtements homogènes isomorphes d'un graphe borélien G , alors les projections des groupoïdes boréliens fondamentaux $p(\pi^1(G', G^0))$ et $(\pi^1(G'', G^0))$ de (G', G^0) et (G'', G^0) sont stablement conjuguées dans \mathcal{G} .*

Démonstration : Par hypothèse, $\phi : B \longrightarrow B'$ est un isomorphisme partiel qui est de plus un morphisme intérieur de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_S}$, où B et B' désignent des domaines complets de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_S}$. Soit γ un élément de $(\mathcal{G})_{S|_B}$ de source x appartenant à B . L'application ϕ se prolonge en un isomorphisme entre les \mathcal{G} -espaces fibrés standards $\mathcal{H} \setminus \mathcal{A}_S$ et $\mathcal{H}' \setminus \mathcal{A}_S$ en associant à la classe $([\mathcal{H}] \cdot \gamma)$ dans la fibre de x , la classe $([\mathcal{H}'] \cdot \phi(\gamma))$ dans la fibre de $\phi(x)$. La réciproque est une conséquence immédiate de la proposition 12. \square

Théorème 19. *L'application Ξ qui, à un sous-groupoïde \mathcal{H} défini sur un domaine complet A de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_S}$ où S est une partie génératrice et libre de \mathcal{G}_S sur X , associe le revêtement homogène $\mathcal{H} \setminus \mathcal{A}_{S|_A}$ de G_S déduit par passage au quotient de l'action quasi-libre de \mathcal{H} sur le $\mathcal{G}|_A$ -arboretum $\mathcal{A}_{S|_A}$, induit une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison stable de sous-groupoïdes de \mathcal{G}_S définis sur des domaines complets de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_S}$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements homogènes de G_S .*

Remarque 1 : Notons que le lemme 8 assure Ξ établit de plus une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison stable de sous-groupoïdes uniformément d'indice fini de \mathcal{G}_S définis sur des domaines complets de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_S}$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements homogènes uniformément finis de G_S .

Démonstration : Le lemme précédent assure le bien-fondé et l'injectivité de Ξ ; il reste donc à voir la surjectivité. Soit (G, p, X) un revêtement borélien homogène de G_S dont on note $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}_S$ l'image par p du groupoïde borélien fondamental $\pi^1(G, s)$, où s désigne le relèvement de X dans G^0 .

Considérons le revêtement borélien homogène $(\mathcal{H} \backslash \mathcal{A}_S, d_{\mathcal{H}})$ de G_S déduit par passage au quotient de l'action quasi-libre de \mathcal{H} sur le \mathcal{G} -arborescence canonique \mathcal{A}_S . On déduit des isomorphismes

$$p_{\mathcal{H}}|_{d_{\mathcal{H}}(X)} : d_{\mathcal{H}}(X) \longrightarrow X \quad \text{et} \quad p|_{s(X)} : s(X) \longrightarrow X$$

un isomorphisme naturel de $\phi : d_{\mathcal{H}}(X) \longrightarrow s(X)$ qui fasse commuter le diagramme évident. Ce dernier se prolonge en un isomorphisme, encore noté ϕ , de \mathcal{G}_S -espaces fibrés standards $\mathcal{H} \backslash \mathcal{G} \longrightarrow G^0$ car $d_{\mathcal{H}}(X)$ et $s(X)$ sont des domaines complets des relations d'équivalence boréliennes engendrées par l'action de \mathcal{G}_S sur $\mathcal{H} \backslash \mathcal{G}$ et G^0 respectivement et parce que les \mathcal{G} -stabilisateurs de $d_{\mathcal{H}}$ et s sont égaux à \mathcal{H} . Mais puisque les \mathcal{G}_S -espaces fibrés standards $\mathcal{H} \backslash \mathcal{G}$ et G^0 sont les espaces de sommets de revêtements boréliens d'un même graphe borélien G_S , il est évident que ϕ se prolonge alors en un isomorphisme de revêtements boréliens. \square

Notons que si \mathcal{H} est un sous-groupeïde défini sur un domaine complet A de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_S}$, on a donc un revêtement borélien de $p_{\mathcal{H}} : (\mathcal{A}_S)|_A \longrightarrow \mathcal{H} \backslash (\mathcal{A}_S)|_A$ ainsi qu'un revêtement borélien $p : \mathcal{H} \backslash (\mathcal{A}_S)|_A \longrightarrow (G_S)|_A$. Notons que si \mathcal{H}_1 est un sous-groupeïde de \mathcal{H}_2 défini sur un domaine complet A de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_S}$, on obtient un morphisme de revêtements boréliens de $\mathcal{H}_1 \backslash (\mathcal{A}_S)|_A$ dans $\mathcal{H}_2 \backslash (\mathcal{A}_S)|_A$ au-dessus de G_S .

Remarque 2 : Le théorème précédent fournit une deuxième démonstration du fait que les sous-groupeïdes d'un groupeïde borélien libre $\mathcal{G}(S)$ sur X sont des groupeïdes boréliens libres. En effet, un sous-groupeïde de $\mathcal{G}(S)$ (défini sur un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_S}$) est alors isomorphe au groupeïde fondamental borélien d'un certain revêtement homogène et la proposition 13 assure qu'un tel groupe fondamental borélien est libre sur X .

Nous allons maintenant déduire de ce qui précède quelques applications aux relations d'équivalence boréliennes arborables.

Proposition 20. *Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne arborable sur X et $\Phi = \{\phi_{i_1}, \phi_{i_2} \cdots \phi_{i_n}\}$ un L -arborage fini de \mathcal{R} . On suppose que $m = \phi_{i_1} \phi_{i_2} \cdots \phi_{i_n}$ est un Φ -mot réduit. Alors il existe une sous-relation \mathcal{S} de \mathcal{R} uniformément d'indice fini telle que m soit un élément d'un L -arborage de \mathcal{S} .*

Démonstration : Nous allons construire un graphe d'isomorphismes partiels G^{ip} ayant un nombre fini de sommets à partir des lettres de m et tel que le graphe borélien sous-jacent soit un revêtement homogène de G_{Φ} . Le résultat sera alors une conséquence de la remarque 2 du théorème 19.

Considérons le graphe dont les sommets sont les éléments du groupe cyclique d'ordre $n \geq 1$, chaque sommet étant relié au sommet suivant par une seule paire d'arêtes inverses l'une de l'autre (nous dirons que le sommet associé à l'élément neutre est le sommet racine). On associe l'espace borélien standard X à chaque sommet de ce graphe, ainsi que les éléments de Φ constitutif du mot m aux arêtes successives. À ce stade, nous avons construit un graphe d'isomorphismes partiels \mathcal{G}' ayant un nombre fini de sommets : un tel graphe d'isomorphismes partiels définit un graphe borélien dont l'espace des sommets est la réunion des espaces boréliens standards portés par ces sommets. La restriction de la relation d'équivalence borélienne engendrée par ce graphe borélien sur le sommet racine, qui par définition porte une copie de X , est égale à la sous-relation de \mathcal{R} engendrée par m sur X . Il suffit alors de rajouter des arêtes à \mathcal{G}' et de leur associer des isomorphismes partiels afin d'obtenir un nouveau graphe d'isomorphismes partiels qui soit un revêtement homogène de \mathcal{G}_L . La définition de revêtement borélien impose alors que, pour tout élément ϕ_i de Φ , chaque sommet s de \mathcal{G}' doit être le sommet terminal d'une arête portant l'isomorphisme partiel ϕ_i ainsi que le sommet origine d'une arête portant également l'isomorphisme partiel ϕ_i . Donnons-nous une orientation sur les arêtes du graphe cyclique d'ordre n sous-jacent à \mathcal{G}' telle que toutes les arêtes positives (c'est-à-dire de l'orientation) soient cohérentes : le sommet terminal d'une arête positive est le sommet origine de l'arête positive suivante. Pour tout $1 \leq k \leq n$ et pour toute arête positive, attribuons à son sommet terminal la valeur 1 si elle porte l'isomorphisme partiel ϕ_{i_k} , la valeur -1 si elle porte ϕ_i^{-1} et 0 sinon, et les valeurs opposées à son sommet origine. Le mot m étant réduit, la somme des valeurs attribuées en chaque sommet est 0, 1 ou -1 et la somme sur tous les sommets est nulle : on peut donc rajouter au graphe cyclique sous-jacent à \mathcal{G}' des arêtes orientées portant l'isomorphisme partiel ϕ_{i_k} sur l'arête positive et $\phi_{i_k}^{-1}$ sur l'arête opposée, de telle sorte que désormais, la somme

des valeurs attribuées en chaque sommet soit nulle. On construit ainsi un graphe d'isomorphismes partiels \mathcal{G} contenant \mathcal{G}' et tel que le graphe borélien sur la copie de X associée à la racine du graphe cyclique sous-jacent soit un revêtement enraciné de G_Φ . L'espace des sommets de ce dernier est par définition uniformément fini et il en est de même de l'espace des arêtes puisque Φ est fini. \square

Étant donné une relation d'équivalence borélienne arborable \mathcal{R} sur X et un L -arborage Φ de \mathcal{R} , nous allons introduire la notion de *conjointement de rang fini* pour une paire de sous-relations de \mathcal{R} définies sur des domaines complets. Nous en déduisons (prop. 22) une version faible d'un analogue du théorème de Howson ([How54]) : si G_1 et G_2 sont deux sous-groupes de rang fini d'un groupe libre G , alors $G_1 \cap G_2$ est de rang fini.

Définition 21 (conjointement de rang fini). *Deux sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 définies sur des domaines complets d'une relation d'équivalence borélienne arborable sur X sont conjointement de rang fini dans \mathcal{R} s'il existe un L -arborage Φ de \mathcal{R} tel que \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 soient engendrées par un ensemble commun fini de Φ -mots.*

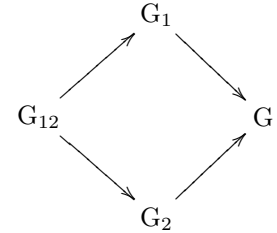
Nous pouvons désormais démontrer le résultat annoncé.

Proposition 22. *Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne arborable sur X . Soit \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 deux sous-relations de \mathcal{R} définies sur X conjointement de rang fini. Alors $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est une sous-relation de \mathcal{R} de uniformément de rang fini.*

Question : Est-il possible de généraliser la proposition précédente au cas de sous-relations uniformément de rang fini ?

Démonstration : Par définition de sous-relations conjointement de rang fini, il existe un L -arborage Φ de \mathcal{R} pour lequel \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont engendrées par un nombre fini de Φ -mots. Quitte à considérer la sous-relation de \mathcal{R} engendrée par les éléments de Φ constituant ces Φ -mots, on peut supposer que Φ est fini. Considérons alors le bouquet de cercles borélien G_Φ canoniquement associé à Φ . Désignons par G_{12} , G_1 et G_2 les revêtements enracinés de G_Φ associés respectivement aux sous-relations $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 et rappelons qu'un morphisme de revêtements induit un morphisme injectif au niveau des groupes fondamentaux (cf. p.7).

En particulier, les images des relations d'équivalence boréliennes associées aux groupoïdes boréliens fondamentaux de G_{12} , G_1 et G_2 par les morphismes de revêtements correspondants sont respectivement $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . De plus, nous avons le diagramme commutatif de revêtements boréliens ci-contre.



Pour tout couple d'éléments \mathcal{R} -équivalents (x, y) de X , désignons par $(x, [y]_i)$ l'image de (x, y) dans l'espace fibré standard $\mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}$.

L'application $\Psi: \begin{cases} \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R} \times \mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R} \\ (x, [y]_{12}) \longmapsto ((x, [y]_1), (x, [y]_2)) \end{cases}$ est injective car si $(x, [y]_{12})$ et $(x', [y]_{12})$ ont la même image par Ψ , alors les éléments x et x' sont à la fois \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 -équivalents : ils sont donc $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ -équivalents et finalement $(x, [y]_{12})$ est égal à $(x', [y]_{12})$.

Or par construction les espaces de sommets de G_{12} , G_1 et G_2 sont respectivement les espaces fibrés standards $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R}$ sur X . On en déduit donc qu'étant donné un sommet dans G_1 et un sommet dans G_2 , il existe au plus un relevé de ce couple de sommets dans G_{12} . Puisque \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont engendrées par un nombre fini de Φ -mots, ceci assure les espaces de sommets de G_1 et G_2 soient des espaces fibrés uniformément finis sur X . Or l'image du cœur d'un graphe borélien enraciné sur X (cf. déf. 14) par un isomorphisme local de graphes (en particulier un revêtement borélien) est contenue dans le cœur du graphe image. On en déduit que l'espace des sommets du cœur de G_{12} est un espace fibré standard uniformément fini. Or G_{12} est un revêtement borélien d'un bouquet de cercles borélien G_Φ sur un L -arborage Φ fini, ce qui implique que son cœur soit uniformément fini. La remarque suivant la définition 14 permet de conclure. \square

La démonstration précédente s'étend sans aucune difficulté au cas des groupoïdes boréliens. Nous dirons que deux sous-groupoïdes \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 d'un groupoïde borélien libre sur X sont *conjointement de rang fini* dans \mathcal{G} s'il existe un L-graphage libre et générateur Φ de \mathcal{G} tel que \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 soient engendrés par un ensemble commun fini de Φ -mots. Le résultat se reformule ainsi :

Proposition 23. *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien libre sur X . Soit \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 deux sous-groupoïdes de \mathcal{G} définis sur X conjointement de rang fini. Alors $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ est un sous-groupoïde de \mathcal{G} uniformément de rang fini. \square*

En théorie des groupes, le théorème de Grushko ([Gru], voir [Imr84] et [Sta65] pour des preuves topologiques) est un résultat subtil sur les parties génératrices d'un produit libre de groupes. Dans le cas de deux facteurs G_1 et G_2 , il assure que si le produit libre $G_1 \star G_2$ est de rang fini, alors à partir de toute partie génératrice de $G_1 \star G_2$, on peut construire une partie génératrice de même cardinal dont les éléments appartiennent à G_1 ou G_2 .

Nous allons démontrer un résultat analogue au théorème de Grushko pour les groupoïdes boréliens et expliciterons (cor. 26) le cas important des groupoïdes boréliens principaux.

Théorème 24. *Soit $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ un morphisme de groupoïdes boréliens surjectif où \mathcal{G} est un groupoïde borélien libre sur X et $\mathcal{H} = \star_{i \in I} \mathcal{H}_i$ un produit libre de groupoïdes boréliens sur un espace borélien standard Y . Alors il existe des sous-groupoïdes \mathcal{G}_i de \mathcal{G} définis sur X tels que $\mathcal{G} = \star_{i \in I} \mathcal{G}_i$ et vérifiant*

$$\forall i \in I \quad f(\mathcal{G}_i) = \mathcal{H}_i.$$

Commençons par donner une caractérisation géométrique des produits libres. Soit $\mathcal{G} = \star_{i \in I} \mathcal{G}_i$ un produit libre (dénombrable) de groupoïdes boréliens sur un espace borélien standard X . Étant donné des parties génératrices \mathcal{S}_i des \mathcal{G}_i , considérons la réunion \mathcal{S} des \mathcal{S}_i : c'est une partie génératrice de \mathcal{G} . Considérons le \mathcal{G} -champ de graphes borélien connexes de Cayley $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$: l'espace des sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ est l'espace fibré standard canonique source (\mathcal{G}, s) et l'espace des arêtes est I-coloré (c'est-à-dire tel que chaque arête porte une couleur i de I préservée par l'action de \mathcal{G}). Considérons un chemin fermé dans la fibre d'un élément x de X . On peut découper ce chemin en sous-chemins monochromes (c'est-à-dire dont les arêtes sont de même couleur) et tel que deux sous-chemins consécutifs aient des colorations distinctes. L'espace des arêtes étant l'espace fibré standard $\mathcal{G} \star \mathcal{S}$ sur X par définition, on en déduit un uplet d'éléments composables de \mathcal{G} tel que la source du premier et le but du dernier élément soient les mêmes et tel que deux éléments successifs appartiennent à des \mathcal{G}_i distincts. Par définition d'un produit libre, on en déduit qu'au moins un des éléments de cet uplet est trivial, autrement dit que l'un des sous-chemins considérés précédemment est fermé.

Lemme 25. *Soit \mathcal{G} un groupoïde borélien sur X . Alors \mathcal{G} est le produit libre des sous-groupoïdes $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ si et seulement s'il existe un \mathcal{G} -champ de graphes borélien connexes I-coloré \mathcal{A} sur X dont l'espace des sommets est \mathcal{G} et tel que tout chemin fermé de \mathcal{A} contienne un sous-chemin fermé monochromatique.*

Démonstration : Considérons dans \mathcal{A}^0 la partie borélienne constituée des sommets pour lesquels il existe un chemin monochromatique de couleur i les reliant au sommet origine de leur fibre (c'est-à-dire à la diagonale de l'espace fibré standard (\mathcal{G}, s)). Cette partie borélienne \mathcal{G} -invariante définit un sous-groupoïde \mathcal{G}_i de \mathcal{G} (rappelons encore que l'espace des arêtes est l'espace fibré standard $\mathcal{G} \star \mathcal{S}$ sur X) et il n'est pas difficile de voir que \mathcal{G} est engendré par les \mathcal{G}_i puisque la diagonale de l'espace fibré standard (\mathcal{G}, s) est un domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A}^0 .

Considérons des éléments de la réunion des \mathcal{G}_i tels que le produit soit trivial (c'est-à-dire id_x pour un certain x de X) et tels que deux éléments successifs soient dans des \mathcal{G}_i distincts. Dans la fibre de x , on en déduit un chemin fermé constitué de sous-chemins monochromatiques que l'on peut supposer de longueurs minimales et tel que deux sous-chemins consécutifs soient de coloration différente. Par hypothèse, ce chemin contient un sous-chemin fermé monochromatique, ce qui est contradictoire avec la minimalité des longueurs des sous-chemins précédents. \square

Démonstration du théorème : Soit \mathcal{S} une partie borélienne libre et génératrice de \mathcal{G} et \mathcal{A} le \mathcal{G} -arboretum canonique (gauche) de Cayley associé à $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ sur X . Quitte à considérer une restriction de \mathcal{S} à une partie borélienne (et donc un sous-groupeïde libre de \mathcal{G} , cf. [Alv08b]), on peut supposer que l'intersection de \mathcal{S} avec le noyau d'isotropie de f est vide.

L'image $f(\gamma)$ de tout élément γ de \mathcal{S} est un élément non trivial de \mathcal{H} dont on peut considérer la décomposition réduite suivant les \mathcal{H}_i . Cette décomposition réduite induit naturellement une subdivision de l'arête γ dans \mathcal{A} en un nombre fini d'arêtes dont chacune porte une couleur i de I . En prolongeant par \mathcal{G} -équivariance à \mathcal{A} cette opération, on en déduit un arboretum \mathcal{A}' sur X coloré (c'est-à-dire dont chaque arête porte une couleur i) sur lequel \mathcal{G} agit en préservant la coloration, ainsi qu'un domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur l'espace des sommets \mathcal{A}'^0 (rappelons que l'image de la diagonale de (\mathcal{G}, s) est un domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A}^0). Considérons l'application borélienne $\bar{f} : \mathcal{A}'^1 \rightarrow \mathcal{H}$ qui envoie chaque arête de \mathcal{A}' sur l'élément de \mathcal{H} correspondant : c'est une application borélienne \mathcal{G} -invariante envoyant tout chemin de la fibre \mathcal{A}'_x d'un élément x de X sur un élément de \mathcal{H} .

Pour tout élément x de X et pour tout chemin dans la \mathcal{A}' -fibre de x dont l'image par \bar{f} est trivial dans \mathcal{H} , on adjoint une arête blanche à \mathcal{A}'_x joignant les extrémités de ce chemin. Désignons par \mathcal{A}'' le champ de graphes borélien connexes sur X ainsi obtenu et sur lequel \mathcal{G} continue d'agir avec un domaine fondamental pour l'action D . On prolonge l'application borélienne \bar{f} à \mathcal{A}''^1 en envoyant toute arête blanche sur l'élément trivial correspondant de \mathcal{H} . Ainsi tout chemin fermé dans la fibre d'un élément x de X a pour image par \bar{f} un élément trivial de \mathcal{H} . Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de contracter le champ de graphes borélien ci-dessus de sorte que l'image de la diagonale soit un domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur l'espace des sommets (ce qui assurera que l'espace des sommets s'identifie au \mathcal{G} -espace fibré standard (\mathcal{G}, s)) et tel que tout chemin fermé de \mathcal{A} contienne un sous-chemin fermé monochromatique. Le lemme précédent permettra alors de conclure.

Donnons-nous une numérotation borélienne du domaine fondamental D de l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A}''^0 telle que l'image de d dans \mathcal{A}''^0 soit l'ensemble des sommets de numéro 1. Supposons que s soit une section partielle, définie sur une partie borélienne A de X , à valeurs dans l'ensemble des sommets de numéros différents de 1 de ce domaine fondamental. Par surjectivité de \bar{f} , quitte à découper le domaine de définition de s et à considérer des translats de s sous l'action de \mathcal{G} , on peut supposer que dans la fibre de tout élément x de A , les sommets id_x et $s(x)$ soient reliés par une arête blanche. Pour tout élément x de A , considérons le plus court chemin formé d'arêtes I -colorées reliant id_x et $s(x)$: l'image par \bar{f} de ce chemin est par construction un élément trivial de \mathcal{H} . Notons c un tel chemin et $c = c_1 \cdots c_n$ sa décomposition maximale en sous-chemins I -colorés. On a donc

$$\bar{f}(c_1) \cdots \bar{f}(c_n) = 1$$

et deux éléments consécutifs $\bar{f}(c_k)$ et $\bar{f}(c_{k+1})$ du membre de gauche ne sont pas inverses l'un de l'autre car les sous-chemins c_k et c_{k+1} portent des couleurs distinctes. Par suite, l'un des $\bar{f}(c_k)$ doit être trivial par définition d'un produit libre. Mais par minimalité de c , les extrémités de c_k ne sont pas des sommets de la même orbite sous l'action de \mathcal{G} : ces deux sommets sont donc reliés par une arête blanche. On a ainsi construit une section partielle d'arêtes s' définie sur A et sur laquelle on contracte alors le champ de graphes borélien \mathcal{A}'' en identifiant les sommets $o(s'(x))$ et $t(s'(x))$ et en supprimant l'arête $s'(x)$ pour tout x de A . On prolonge cette contraction par \mathcal{G} -équivariance ; le domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A}''^0 passe au quotient en un nouveau domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur le nouvel espace des sommets, ainsi que la section de sommets s mais, pour tout x de A , la longueur du chemin formé d'arêtes I -colorées reliant id_x et $s(x)$ est strictement plus petite.

Cette construction itérative fournit une exhaustion du domaine fondamental de l'action de \mathcal{G} sur \mathcal{A}''^0 , chacune des contractions ne produisant que des chemins fermés I -monochromatiques. \square

Le théorème précédent dans les cas particuliers où X et Y sont des singletons redonnent le théorème de Grushko classique.

Corollaire 26. *Soit \mathcal{G} un groupeïde borélien libre sur X tel que la relation d'équivalence borélienne associée $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ soit le produit libre d'un ensemble dénombrable de sous-relations \mathcal{R}_i définies sur X . Alors il existe des sous-groupeïdes \mathcal{G}_i de \mathcal{G} définis sur X tels que $\mathcal{G} = \star_{i \in I} \mathcal{G}_i$ et vérifiant*

$$\forall i \in I \quad \mathcal{R}_{G_i} = \mathcal{R}_i. \quad \square$$

Concluons en nous rappelant qu'en théorie des revêtements, certains revêtements (du bouquet de cercles par exemple) jouent un rôle privilégié : ce sont les revêtements galoisiens pour lesquels le groupe d'automorphismes du revêtement agit transitivement sur le revêtement et qui correspondent aux sous-groupes distingués dans le dictionnaire. Soit Φ un arborage sur X , \mathcal{S} une sous-relation de la relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_Φ engendrée par Φ , \mathcal{A}_Φ le \mathcal{R}_Φ -arboretum canonique et $p : \mathcal{S} \setminus \mathcal{A}_\Phi \rightarrow G_\Phi$ le revêtement borélien du bouquet de cercles borélien G_Φ correspondant. Étant donné deux sections partielles s et s' saturantes de $\mathcal{S} \setminus \mathcal{A}_\Phi$ définies sur le domaine complet A de \mathcal{R}_Φ , existe-il un automorphisme de revêtement borélien f qui enverrait s sur s' ? D'après le lemme 6 de [Alv08a], il est nécessaire que les stabilisateurs de s et s' soient égaux. Or nous savons qu'ils sont également stablement orbitalement équivalents à \mathcal{S} . Ainsi, si pour toute paire de sections partielles comme ci-dessus, il existe un automorphisme de revêtement borélien f qui envoie l'une sur l'autre, on en déduit que \mathcal{S} est stablement égale à toutes ses conjuguées, une définition naturelle de sous-relation *distinguée*...

Références

- [Alv08a] A. ALVAREZ – « Théorème de Kurosh pour les relations d'équivalence boréliennes », prépublication (2008).
- [Alv08b] A. ALVAREZ – « Une théorie de Bass-Serre pour les groupoïdes boréliens », prépublication (2008).
- [Gru] I. A. GRUSHKO – « Über die Basen eines freien Produktes von Gruppen », *Rec. Math.* **8** (1940), 169-182.
- [How54] A. G. HOWSON – « On the intersection of finitely generated free groups », *J. London Math. Soc.* **29** (1954), 428-434.
- [Imr84] W. IMRICH – « Grushko's theorem », *Arch. Math. (Basel)* **43** (1984), 385-387.
- [Kec95] A. S. KECHRIS – *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag, New York (1995).
- [KM04] A. S. KECHRIS et B. D. MILLER – *Topics in orbit equivalence*, Lecture Notes in Math. **1852**, Springer-Verlag, Berlin (2004).
- [Kur66] K. KURATOWSKI – *Topology. Vol. I*, Academic Press, New York (1966).
- [Sta65] J. R. STALLINGS – « A topological proof of Grushko's theorem on free products », *Math. Z.* **90** (1965), 1-8.