Le phénomène de Kunze–Stein

(un ancêtre de la propriété DR)

Jean–Philippe Anker

Université d'Orléans & CNRS
Laboratoire MAPMO (UMR 6628)
Fédération Denis Poisson (FR 2964)

12 octobre 2007 / Journées PAG

Introduction

G groupe (localement compact) unimodulaire

Problème : $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$?

Inégalité implicite : $\|f * g\|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

Young : $G = \mathbb{R}^n$

$L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G) \Longleftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$

Démonstration :

$\Leftarrow$: interpolation à partir des cas triviaux

G groupe (localement compact) unimodulaire

Problème : $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$?

Inégalité implicite : $\| f * g \|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q}$

Young : $G = \mathbb{R}^n$

$L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G) \Longleftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$

Démonstration :

$\Leftarrow$: interpolation à partir des cas triviaux

G groupe (localement compact) unimodulaire

Problème : $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$?

Inégalité implicite : $\| f * g \|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

Young : $G = \mathbb{R}^n$

$L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G) \Longleftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$

Démonstration :

$\Leftarrow$: interpolation à partir des cas triviaux

Introduction

G groupe (localement compact) unimodulaire

Problème : $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$?

Inégalité implicite : $\| f * g \|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

Young : $G = \mathbb{R}^n$

$L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G) \Longleftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$

Démonstration :

$\Leftarrow$: interpolation à partir des cas triviaux

G groupe (localement compact) unimodulaire

Problème : $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$?

Inégalité implicite : $\|\, f * g \,\|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q}$

Young : $G = \mathbb{R}^n$

$L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G) \iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$

Démonstration :

$\Leftarrow$: interpolation à partir des cas triviaux

G groupe (localement compact) unimodulaire

Problème : $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$?

Inégalité implicite : $\| f * g \|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q}$

Young : $G = \mathbb{R}^n$

$L^p(G) * L^q(G) \subset L^p(G) \Longleftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$

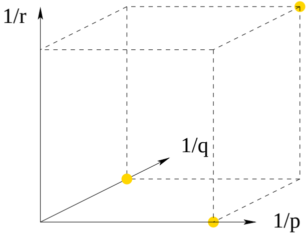
Démonstration :

$\Leftarrow$: interpolation à partir des cas triviaux

$L^1 * L^1 \subset L^1$

$L^1 * L^\infty \subset L^\infty$

$L^\infty * L^1 \subset L^\infty$



G groupe (localement compact) unimodulaire

Problème : $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$?

Inégalité implicite : $\|f * g\|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

Young : $G = \mathbb{R}^n$

$L^p(G) * L^q(G) \subset L^p(G) \Longleftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$

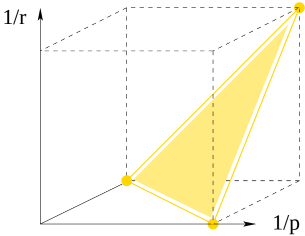
Démonstration :

$\Leftarrow$: interpolation à partir des cas triviaux

$L^1 * L^1 \subset L^1$

$L^1 * L^\infty \subset L^\infty$

$L^\infty * L^1 \subset L^\infty$



$\Rightarrow$: homothéties (*rescaling*)

G groupe (localement compact) unimodulaire

Problème : $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$?

Inégalité implicite : $\|\, f * g \,\|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q}$

Young : $G = \mathbb{R}^n$

$L^p(G) * L^q(G) \subset L^p(G) \Longleftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$

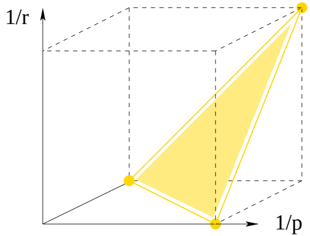
Démonstration :

$\Leftarrow$: interpolation à partir des cas triviaux

$L^1 * L^1 \subset L^1$

$L^1 * L^\infty \subset L^\infty$

$L^\infty * L^1 \subset L^\infty$



$\Rightarrow$: homothéties (*rescaling*)

Kunze–Stein *standard*

G groupe de Lie semi–simple (non compact, centre fini)

Phénomène de Kunze–Stein : énoncés équivalents

- $L^p(G)*L^2(G)\subset L^2(G)\ \ \forall\,1\le p<2$
- $L^2(G)*L^2(G)\subset L^{2+\varepsilon}(G)\ \ \forall\,\varepsilon>0$
- $L^p(G)*L^q(G)\subset L^r(G)$ dans les cas suivants

Kunze–Stein *standard*

G groupe de Lie semi–simple (non compact, centre fini)

Phénomène de Kunze–Stein : énoncés équivalents

- $L^p(G) * L^2(G) \subset L^2(G)$ $\forall\, 1 \leq p < 2$
- $L^2(G) * L^2(G) \subset L^{2+\varepsilon}(G)$ $\forall\, \varepsilon > 0$
- $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$ dans les cas suivants

Kunze–Stein *standard*

G groupe de Lie semi–simple (non compact, centre fini)

Phénomène de Kunze–Stein : énoncés équivalents

- $L^p(G)*L^2(G)\subset L^2(G)\ \ \forall\, 1\leq p<2$
- $L^2(G)*L^2(G)\subset L^{2+\varepsilon}(G)\ \ \forall\, \varepsilon>0$
- $L^p(G)*L^q(G)\subset L^r(G)$ dans les cas suivants

Kunze–Stein *standard*

G groupe de Lie semi–simple (non compact, centre fini)

Phénomène de Kunze–Stein : énoncés équivalents

- $L^p(G)*L^2(G)\subset L^2(G)\ \ \forall\, 1\le p<2$
- $L^2(G)*L^2(G)\subset L^{2+\varepsilon}(G)\ \ \forall\, \varepsilon>0$
- $L^p(G)*L^q(G)\subset L^r(G)$ dans les cas suivants

Kunze–Stein *standard*

G groupe de Lie semi–simple (non compact, centre fini)

Phénomène de Kunze–Stein : énoncés équivalents

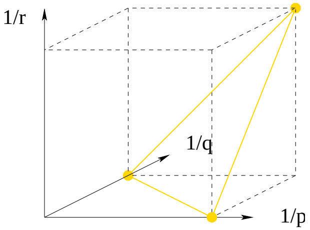
- $L^p(G)*L^2(G)\subset L^2(G)\ \ \forall\, 1\leq p<2$
- $L^2(G)*L^2(G)\ \subset L^{2+\varepsilon}(G)\ \ \forall\, \varepsilon>0$
- $L^p(G)*L^q(G)\subset L^r(G)$ dans les cas suivants

Kunze–Stein *standard*

G groupe de Lie semi–simple (non compact, centre fini)

Phénomène de Kunze–Stein : énoncés équivalents

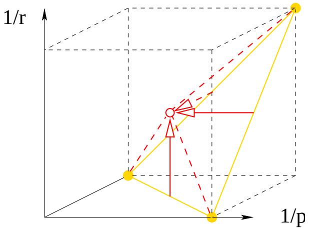
- $L^p(G) * L^2(G) \subset L^2(G) \;\; \forall\, 1 \le p < 2$
- $L^2(G) * L^2(G) \subset L^{2+\varepsilon}(G) \;\; \forall\, \varepsilon > 0$
- $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$ dans les cas suivants



G groupe de Lie semi–simple (non compact, centre fini)

Phénomène de Kunze–Stein : énoncés équivalents

- $L^p(G) * L^2(G) \subset L^2(G) \quad \forall\, 1 \leq p < 2$
- $L^2(G) * L^2(G) \subset L^{2+\varepsilon}(G) \quad \forall\, \varepsilon > 0$
- $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$ dans les cas suivants

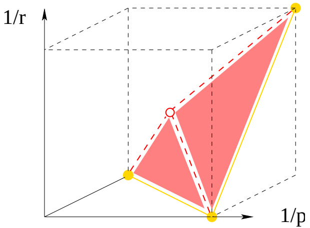


Kunze–Stein *standard*

G groupe de Lie semi–simple (non compact, centre fini)

Phénomène de Kunze–Stein : énoncés équivalents

- $L^p(G) * L^2(G) \subset L^2(G) \;\; \forall\, 1 \le p < 2$
- $L^2(G) * L^2(G) \subset L^{2+\varepsilon}(G) \;\; \forall\, \varepsilon > 0$
- $L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G)$ dans les cas suivants



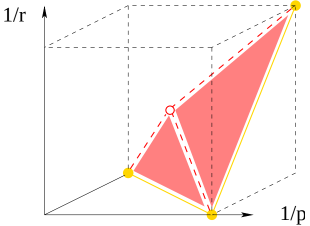
Historique :

- $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$: Kunze & Stein
- cas général : Cowling

G groupe de Lie semi–simple (non compact, centre fini)

Phénomène de Kunze–Stein : énoncés équivalents

- $L^p(G)*L^2(G)\subset L^2(G)\ \ \forall\,1\le p<2$
- $L^2(G)*L^2(G)\ \subset L^{2+\varepsilon}(G)\ \ \forall\,\varepsilon>0$
- $L^p(G)*L^q(G)\subset L^r(G)$ dans les cas suivants



Historique :

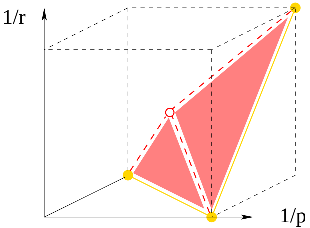
- $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$: Kunze & Stein
- cas général : Cowling

Kunze–Stein *standard*

G groupe de Lie semi–simple (non compact, centre fini)

Phénomène de Kunze–Stein : énoncés équivalents

- $L^p(G)*L^2(G)\subset L^2(G)\ \ \forall\, 1\le p<2$
- $L^2(G)*L^2(G)\ \subset L^{2+\varepsilon}(G)\ \ \forall\ \varepsilon>0$
- $L^p(G)*L^q(G)\subset L^r(G)$ dans les cas suivants



Historique :

- $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$: Kunze & Stein
- cas général : Cowling

Kunze–Stein *standard*

- dém. initiale $\rightsquigarrow$ formule Plancherel (Harish–Chandra)

$$L^2(G) \overset{\text{Fourier}}{\cong} \int_{\widehat{G}}^{\oplus} d\nu(\pi)\, \mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\pi^* \;=\; \int_{\mathfrak{a}^+}^{\oplus} \frac{d\lambda}{|\mathbf{c}(\lambda)|^2}\, \mathcal{H}_{\pi_\lambda} \otimes \mathcal{H}_{\pi_\lambda}^* \;\oplus\; \dots$$

$\pi_\lambda = \mathrm{Ind}_{P=MAN}^{G=KAN} 1 \otimes e^{i\lambda} \otimes 1$ série principale sphérique

- Herz : réduction de L = repr. rég. de G sur $L^2(G)$ à π_0 = repr. quasi–rég. de G sur $L^2(G/P) = L^2(K/M)$
  - Principe de majoration :
    $\forall\, f, g \in L^2(G),\ \exists\, \xi, \eta \in L^2(K/M)$ t.q.
    $$\begin{cases} \xi \geq 0,\ \|\xi\| = \|f\|;\ \eta \geq 0,\ \|\eta\| = \|g\| \\ |\langle L(x) f \,|\, g \rangle| \leq \langle \pi_0(x) \xi \,|\, \eta \rangle \quad \forall\, x \in G \end{cases}$$
  - Contenance faible $\pi_0 \prec L$:
    $\forall\, \xi, \eta \in L^2(K/M),\ \exists\, f_j, g_j \in L^2(G)$ t.q.
    $$\begin{cases} \|f_j\| \to \|\xi\|,\ \|g_j\| \to \|\eta\| \\ \langle L(x) f_j \,|\, g_j \rangle \to \langle \pi_0(x) \xi \,|\, \eta \rangle \text{ unif. sur tout compact} \end{cases}$$
  - Conséquence : $\|L(\mu)\| = \|\pi_0(\mu)\| \quad \forall\, \mu \geq 0$

Kunze–Stein *standard*

- dém. initiale $\rightsquigarrow$ formule Plancherel (Harish–Chandra)

$$L^2(G) \overset{\text{Fourier}}{\cong} \int_{\widehat{G}}^{\oplus} d\nu(\pi)\, \mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\pi^* \;=\; \int_{\mathfrak{a}^+}^{\oplus} \frac{d\lambda}{|\mathbf{c}(\lambda)|^2}\, \mathcal{H}_{\pi_\lambda} \otimes \mathcal{H}_{\pi_\lambda}^* \;\oplus\; \dots$$

$\pi_\lambda = \mathrm{Ind}_{P=MAN}^{G=KAN} 1 \otimes e^{i\lambda} \otimes 1$ série principale sphérique

- Herz : réduction de L = repr. rég. de G sur $L^2(G)$ à π_0 = repr. quasi–rég. de G sur $L^2(G/P) = L^2(K/M)$
  - Principe de majoration : $\forall\, f, g \in L^2(G)$, $\exists\, \xi, \eta \in L^2(K/M)$ t.q.
    $$\begin{cases} \xi \geq 0,\ \|\xi\| = \|f\|;\ \eta \geq 0,\ \|\eta\| = \|g\| \\ |\langle L(x) f | g \rangle| \leq \langle \pi_0(x) \xi | \eta \rangle \quad \forall\, x \in G \end{cases}$$
  - Contenance faible $\pi_0 \prec L$: $\forall\, \xi, \eta \in L^2(K/M)$, $\exists\, f_j, g_j \in L^2(G)$ t.q.
    $$\begin{cases} \|f_j\| \to \|\xi\|,\ \|g_j\| \to \|\eta\| \\ \langle L(x) f_j | g_j \rangle \to \langle \pi_0(x) \xi | \eta \rangle \text{ unif. sur tout compact} \end{cases}$$
  - Conséquence : $\|L(\mu)\| = \|\pi_0(\mu)\| \quad \forall\, \mu \geq 0$

Kunze–Stein *standard*

- dém. initiale $\rightsquigarrow$ formule Plancherel (Harish–Chandra)

$$L^2(G) \overset{\text{Fourier}}{\cong} \int_{\widehat{G}}^{\oplus} d\nu(\pi)\, \mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\pi^* \;=\; \int_{\mathfrak{a}^+}^{\oplus} \frac{d\lambda}{|\mathbf{c}(\lambda)|^2}\, \mathcal{H}_{\pi_\lambda} \otimes \mathcal{H}_{\pi_\lambda}^* \;\oplus\; \dots$$

$\pi_\lambda = \operatorname{Ind}_{P=MAN}^{G=KAN} 1 \otimes e^{i\lambda} \otimes 1$ série principale sphérique

- Herz : réduction de L = repr. rég. de G sur $L^2(G)$ à π_0 = repr. quasi–rég. de G sur $L^2(G/P) = L^2(K/M)$
  - Principe de majoration :
    $\forall\, f, g \in L^2(G),\ \exists\, \xi, \eta \in L^2(K/M)$ t.q.
    $$\begin{cases} \xi \geq 0,\ \|\xi\| = \|f\|;\ \eta \geq 0,\ \|\eta\| = \|g\| \\ |\langle L(x) f | g \rangle| \leq \langle \pi_0(x) \xi | \eta \rangle \quad \forall\, x \in G \end{cases}$$
  - Contenance faible $\pi_0 \prec L$:
    $\forall\, \xi, \eta \in L^2(K/M),\ \exists\, f_j, g_j \in L^2(G)$ t.q.
    $$\begin{cases} \|f_j\| \to \|\xi\|,\ \|g_j\| \to \|\eta\| \\ \langle L(x) f_j | g_j \rangle \to \langle \pi_0(x) \xi | \eta \rangle \text{ unif. sur tout compact} \end{cases}$$
  - Conséquence : $\|L(\mu)\| = \|\pi_0(\mu)\| \quad \forall\, \mu \geq 0$

Kunze–Stein *standard*

- dém. initiale $\rightsquigarrow$ formule Plancherel (Harish–Chandra)

$$L^2(G) \overset{\text{Fourier}}{\cong} \int_{\widehat{G}}^{\oplus} d\nu(\pi)\,\mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\pi^* \;=\; \int_{\mathfrak{a}^+}^{\oplus} \frac{d\lambda}{|\mathbf{c}(\lambda)|^2}\,\mathcal{H}_{\pi_\lambda} \otimes \mathcal{H}_{\pi_\lambda}^* \;\oplus\; \dots$$

$\pi_\lambda = \operatorname{Ind}_{P=MAN}^{G=KAN} 1 \otimes e^{i\lambda} \otimes 1$ série principale sphérique

- Herz : réduction de L = repr. rég. de G sur $L^2(G)$
  à π_0 = repr. quasi–rég. de G sur $L^2(G/P) = L^2(K/M)$
  - Principe de majoration :
    $\forall\, f, g \in L^2(G)$, $\exists\, \xi, \eta \in L^2(K/M)$ t.q.
    $$\begin{cases} \xi \geq 0,\ \|\xi\| = \|f\|;\ \eta \geq 0,\ \|\eta\| = \|g\| \\ |\langle L(x) f | g \rangle| \leq \langle \pi_0(x) \xi | \eta \rangle \quad \forall\, x \in G \end{cases}$$
  - Contenance faible $\pi_0 \prec L$:
    $\forall\, \xi, \eta \in L^2(K/M)$, $\exists\, f_j, g_j \in L^2(G)$ t.q.
    $$\begin{cases} \|f_j\| \to \|\xi\|,\ \|g_j\| \to \|\eta\| \\ \langle L(x) f_j | g_j \rangle \to \langle \pi_0(x) \xi | \eta \rangle \text{ unif. sur tout compact} \end{cases}$$
  - Conséquence : $\|L(\mu)\| = \|\pi_0(\mu)\| \quad \forall\, \mu \geq 0$

Kunze–Stein *standard*

- dém. initiale $\rightsquigarrow$ formule Plancherel (Harish–Chandra)

$$L^2(G) \overset{\text{Fourier}}{\cong} \int_{\widehat{G}}^{\oplus} d\nu(\pi)\,\mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\pi^* = \int_{\mathfrak{a}^+}^{\oplus} \frac{d\lambda}{|\mathbf{c}(\lambda)|^2}\,\mathcal{H}_{\pi_\lambda} \otimes \mathcal{H}_{\pi_\lambda}^* \oplus \dots$$

  $\pi_\lambda = \operatorname{Ind}_{P=MAN}^{G=KAN} 1 \otimes e^{i\lambda} \otimes 1$ série principale sphérique

- Herz : réduction de L = repr. rég. de G sur $L^2(G)$ à π_0 = repr. quasi–rég. de G sur $L^2(G/P) = L^2(K/M)$
  - Principe de majoration :
    $\forall\, f, g \in L^2(G)$, $\exists\, \xi, \eta \in L^2(K/M)$ t.q.
    $$\begin{cases} \xi \geq 0,\ \|\xi\| = \|f\|;\ \eta \geq 0,\ \|\eta\| = \|g\| \\ |\langle L(x) f | g \rangle| \leq \langle \pi_0(x) \xi | \eta \rangle \quad \forall\, x \in G \end{cases}$$
  - Contenance faible $\pi_0 \prec L$:
    $\forall\, \xi, \eta \in L^2(K/M)$, $\exists\, f_j, g_j \in L^2(G)$ t.q.
    $$\begin{cases} \|f_j\| \to \|\xi\|,\ \|g_j\| \to \|\eta\| \\ \langle L(x) f_j | g_j \rangle \to \langle \pi_0(x) \xi | \eta \rangle \text{ unif. sur tout compact} \end{cases}$$
  - Conséquence : $\|L(\mu)\| = \|\pi_0(\mu)\| \quad \forall\, \mu \geq 0$

Kunze–Stein *standard*

- Cas particulier : μ bi–K–invariante
  $\|L(\mu)\| = \langle \pi_0(\mu) 1 | 1 \rangle = \int_G d\mu(x)\, \varphi_0(x)$
  $\varphi_0(x) = \langle \pi_0(x) 1 | 1 \rangle$ fonction sphérique fondamentale
- Remarques :
  - $L^2(G) * L^2(G) \subset L^2(G) \iff G$ compact
  - G moyennable non compact
    $\Longrightarrow L^2(G) * L^2(G) \not\subset L^r(G) \;\; \forall\, 2 < r < \infty$
  - résultat limite (*endpoint*) ?
    $\begin{cases} p \nearrow 2 \text{ dans } L^p(G) * L^2(G) \subset L^2(G) \\ r \searrow 2 \text{ dans } L^2(G) * L^2(G) \subset L^r(G) \end{cases}$
  - convolution $\rightsquigarrow$ techniques réelles !

Kunze–Stein *standard*

- Cas particulier : μ bi–K–invariante
  $\|L(\mu)\| = \langle \pi_0(\mu) 1 | 1 \rangle = \int_G d\mu(x)\, \varphi_0(x)$
  $\varphi_0(x) = \langle \pi_0(x) 1 | 1 \rangle$ fonction sphérique fondamentale
- Remarques :
  - $L^2(G) * L^2(G) \subset L^2(G) \iff G$ compact
  - G moyennable non compact
    $\Longrightarrow L^2(G) * L^2(G) \not\subset L^r(G) \quad \forall\, 2 < r < \infty$
  - résultat limite (*endpoint*) ?
    $\begin{cases} p \nearrow 2 \text{ dans } L^p(G) * L^2(G) \subset L^2(G) \\ r \searrow 2 \text{ dans } L^2(G) * L^2(G) \subset L^r(G) \end{cases}$
  - convolution $\rightsquigarrow$ techniques réelles !

Kunze–Stein *standard*

- Cas particulier : μ bi–K–invariante
  $$\|L(\mu)\| = \langle \pi_0(\mu)1|1\rangle = \int_G d\mu(x)\,\varphi_0(x)$$
  $\varphi_0(x) = \langle \pi_0(x)1|1\rangle$ fonction sphérique fondamentale
- Remarques :
  - $L^2(G)*L^2(G)\subset L^2(G) \iff G$ compact
  - G moyennable non compact
    $\Longrightarrow L^2(G)*L^2(G)\not\subset L^r(G)\ \ \forall\, 2<r<\infty$
  - résultat limite (*endpoint*) ?
    $$\begin{cases} p\nearrow 2 \text{ dans } L^p(G)*L^2(G)\subset L^2(G) \\ r\searrow 2 \text{ dans } L^2(G)*L^2(G)\subset L^r(G) \end{cases}$$
  - convolution $\rightsquigarrow$ techniques réelles !

Kunze–Stein *standard*

- Cas particulier : μ bi–K–invariante
  $\|L(\mu)\| = \langle \pi_0(\mu) 1 | 1 \rangle = \int_G d\mu(x)\, \varphi_0(x)$
  $\varphi_0(x) = \langle \pi_0(x) 1 | 1 \rangle$ fonction sphérique fondamentale
- Remarques :
  - $L^2(G) * L^2(G) \subset L^2(G) \iff G$ compact
  - G moyennable non compact
    $\Longrightarrow L^2(G) * L^2(G) \not\subset L^r(G) \;\; \forall\, 2 < r < \infty$
  - résultat limite (*endpoint*) ?
    $\begin{cases} p \nearrow 2 \;\text{ dans }\; L^p(G) * L^2(G) \subset L^2(G) \\ r \searrow 2 \;\text{ dans }\; L^2(G) * L^2(G) \subset L^r(G) \end{cases}$
  - convolution $\rightsquigarrow$ techniques réelles !

Kunze–Stein *standard*

- Cas particulier : μ bi–K–invariante

  $\|L(\mu)\| = \langle \pi_0(\mu)1|1\rangle = \int_G d\mu(x)\,\varphi_0(x)$

  $\varphi_0(x) = \langle \pi_0(x)1|1\rangle$ fonction sphérique fondamentale
- Remarques :
  - $L^2(G)*L^2(G) \subset L^2(G) \iff G$ compact
  - G moyennable non compact
    $\Longrightarrow L^2(G)*L^2(G) \not\subset L^r(G)\ \ \forall\, 2<r<\infty$
  - résultat limite (*endpoint*) ?
    $\begin{cases} p \nearrow 2 \ \text{ dans } L^p(G)*L^2(G) \subset L^2(G) \\ r \searrow 2 \ \text{ dans } L^2(G)*L^2(G) \subset L^r(G) \end{cases}$
  - convolution $\rightsquigarrow$ techniques réelles !

Kunze–Stein *sharp*

- Herz $\sim$ propriété DR (exposé Christophe Pittet) :
  $L^2(G,dx)*L^2(G,dx)\subset L^2(G,w(x)^{-1}dx)$
  w poids polynomial lié au comportement de φ_0
- rang 1
  - Lohoué & Rychener : $1<p<2$
    $L^{p,1}(G/K)$ algèbre de convolution
  - Pytlik : arbres homogènes
  - Cowling : $1<p<2$, $1\leq a,b,c\leq\infty$ avec $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\geq 1$
    $L^{p,a}(G)*L^{p,b}(G)\subset L^{p,c}(G)$
  - Ionescu : $L^{2,1}(G)*L^{2,1}(G)\subset L^{2,\infty}(G)$
  - Veca : arbres homogènes
- rang supérieur
  - Ionescu : $O^{p,1}(G)*L^p(G)\subset L^p(G)\ \ \forall\ 1<p\leq 2$

Kunze–Stein *sharp*

- Herz $\sim$ propriété DR (exposé Christophe Pittet) :
  $L^2(G,dx)*L^2(G,dx)\subset L^2(G,w(x)^{-1}dx)$
  w poids polynomial lié au comportement de φ_0
- rang 1
  - Lohoué & Rychener : $1<p<2$
    $L^{p,1}(G/K)$ algèbre de convolution
  - Pytlik : arbres homogènes
  - Cowling : $1<p<2$, $1\le a,b,c\le\infty$ avec $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\ge 1$
    $L^{p,a}(G)*L^{p,b}(G)\subset L^{p,c}(G)$
  - Ionescu : $L^{2,1}(G)*L^{2,1}(G)\subset L^{2,\infty}(G)$
  - Veca : arbres homogènes
- rang supérieur
  - Ionescu : $O^{p,1}(G)*L^p(G)\subset L^p(G)\ \ \forall\, 1<p\le 2$

Kunze–Stein *sharp*

- Herz $\sim$ propriété DR (exposé Christophe Pittet) :
  $L^2(G,dx)*L^2(G,dx)\subset L^2(G,w(x)^{-1}dx)$
  w poids polynomial lié au comportement de φ_0
- rang 1
  - Lohoué & Rychener : $1<p<2$
    $L^{p,1}(G/K)$ algèbre de convolution
  - Pytlik : arbres homogènes
  - Cowling : $1<p<2$, $1\leq a,b,c\leq\infty$ avec $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\geq 1$
    $L^{p,a}(G)*L^{p,b}(G)\subset L^{p,c}(G)$
  - Ionescu : $L^{2,1}(G)*L^{2,1}(G)\subset L^{2,\infty}(G)$
  - Veca : arbres homogènes
- rang supérieur
  - Ionescu : $O^{p,1}(G)*L^p(G)\subset L^p(G)\ \ \forall\, 1<p\leq 2$

Kunze–Stein *sharp*

- Herz $\sim$ propriété DR (exposé Christophe Pittet) :
  $L^2(G,dx)*L^2(G,dx)\subset L^2(G,w(x)^{-1}dx)$
  w poids polynomial lié au comportement de φ_0
- rang 1
  - Lohoué & Rychener : $1<p<2$
    $L^{p,1}(G/K)$ algèbre de convolution
  - Pytlik : arbres homogènes
  - Cowling : $1<p<2$, $1\leq a,b,c\leq\infty$ avec $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\geq 1$
    $L^{p,a}(G)*L^{p,b}(G)\subset L^{p,c}(G)$
  - Ionescu : $L^{2,1}(G)*L^{2,1}(G)\subset L^{2,\infty}(G)$
  - Veca : arbres homogènes
- rang supérieur
  - Ionescu : $O^{p,1}(G)*L^p(G)\subset L^p(G)\ \ \forall\, 1<p\leq 2$

Kunze–Stein *sharp*

- Herz $\sim$ propriété DR (exposé Christophe Pittet) :
  $L^2(G,dx)*L^2(G,dx)\subset L^2(G,w(x)^{-1}dx)$
  w poids polynomial lié au comportement de φ_0
- rang 1
  - Lohoué & Rychener : $1<p<2$
    $L^{p,1}(G/K)$ algèbre de convolution
  - Pytlik : arbres homogènes
  - Cowling : $1<p<2$, $1\leq a,b,c\leq\infty$ avec $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\geq 1$
    $L^{p,a}(G)*L^{p,b}(G)\subset L^{p,c}(G)$
  - Ionescu : $L^{2,1}(G)*L^{2,1}(G)\subset L^{2,\infty}(G)$
  - Veca : arbres homogènes
- rang supérieur
  - Ionescu : $O^{p,1}(G)*L^p(G)\subset L^p(G)\ \ \forall\, 1<p\leq 2$

Kunze–Stein *sharp*

- Herz $\sim$ propriété DR (exposé Christophe Pittet) :
  $L^2(G,dx) * L^2(G,dx) \subset L^2(G, w(x)^{-1} dx)$
  w poids polynomial lié au comportement de φ_0
- rang 1
  - Lohoué & Rychener : $1 < p < 2$
    $L^{p,1}(G/K)$ algèbre de convolution
  - Pytlik : arbres homogènes
  - Cowling : $1 < p < 2$, $1 \leq a, b, c \leq \infty$ avec $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \geq 1$
    $L^{p,a}(G) * L^{p,b}(G) \subset L^{p,c}(G)$
  - Ionescu : $L^{2,1}(G) * L^{2,1}(G) \subset L^{2,\infty}(G)$
  - Veca : arbres homogènes
- rang supérieur
  - Ionescu : $O^{p,1}(G) * L^p(G) \subset L^p(G) \quad \forall\, 1 < p \leq 2$

Kunze–Stein *sharp*

- Herz $\sim$ propriété DR (exposé Christophe Pittet) :
  $L^2(G,dx)*L^2(G,dx)\subset L^2(G,w(x)^{-1}dx)$
  w poids polynomial lié au comportement de φ_0
- rang 1
  - Lohoué & Rychener : $1<p<2$
    $L^{p,1}(G/K)$ algèbre de convolution
  - Pytlik : arbres homogènes
  - Cowling : $1<p<2$, $1\leq a,b,c\leq\infty$ avec $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\geq 1$
    $L^{p,a}(G)*L^{p,b}(G)\subset L^{p,c}(G)$
  - Ionescu : $L^{2,1}(G)*L^{2,1}(G)\subset L^{2,\infty}(G)$
  - Veca : arbres homogènes
- rang supérieur
  - Ionescu : $O^{p,1}(G)*L^p(G)\subset L^p(G)\ \ \forall\ 1<p\leq 2$

Kunze–Stein *sharp*

Espaces de Lorentz :

$|f| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \mathbb{1}_{A_j}$ avec $\begin{cases} \alpha_1, \dots, \alpha_N > 0 \\ A_1 \subset \dots \subset A_N \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ réarrangement décroissant

$f^* = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \mathbb{1}_{]0,|A_j|[}$

Kunze–Stein *sharp*

Espaces de Lorentz :

$$|f| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \mathbb{1}_{A_j} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_1, \ldots, \alpha_N > 0 \\ A_1 \subset \ldots \subset A_N \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ réarrangement décroissant

$$f^* = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \mathbb{1}_{]0,|A_j|[}$$

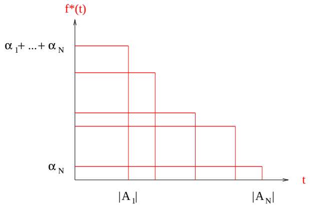
Kunze–Stein *sharp*

Espaces de Lorentz :

$$|f| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \mathbb{1}_{A_j} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_1, \ldots, \alpha_N > 0 \\ A_1 \subset \ldots \subset A_N \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ réarrangement décroissant

$$f^* = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \mathbb{1}_{]0,|A_j|[}$$

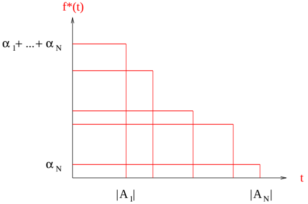


$$\|f\|_{L^{p,a}} = \begin{cases} \left(\frac{a}{p} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^a \right)^{\frac{1}{a}} & \text{si } 1 \leq a < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{si } a = \infty \end{cases}$$

inclusions : $L^{p,1} \subset L^{p,p} = L^p \subset L^{p,\infty}$

Espaces de Lorentz :

$|f| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \mathbb{1}_{A_j}$ avec $\begin{cases} \alpha_1, \dots, \alpha_N > 0 \\ A_1 \subset \dots \subset A_N \end{cases}$



$\rightsquigarrow$ réarrangement décroissant

$f^* = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \mathbb{1}_{]0,|A_j|[}$

$$\|f\|_{L^{p,a}} = \begin{cases} \left(\frac{a}{p} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^a \right)^{\frac{1}{a}} & \text{si } 1 \leq a < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{si } a = \infty \end{cases}$$

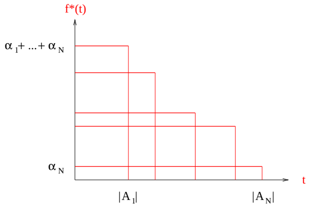
inclusions : $L^{p,1} \subset L^{p,p} = L^p \subset L^{p,\infty}$

Espaces de Lorentz :

$$|f| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \mathbb{1}_{A_j} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_1, \dots, \alpha_N > 0 \\ A_1 \subset \dots \subset A_N \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ réarrangement décroissant

$$f^* = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \mathbb{1}_{]0,|A_j|[}$$



$$\|f\|_{L^{p,a}} = \begin{cases} \left(\frac{a}{p} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^a \right)^{\frac{1}{a}} & \text{si } 1 \leq a < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{si } a = \infty \end{cases}$$

inclusions : $L^{p,1} \subset L^{p,p} = L^p \subset L^{p,\infty}$

Kunze–Stein *sharp*

- rang 1
  - démonstration $\rightsquigarrow$ estimation
    $$\int_G dx\,(\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B)(x)\,\mathbb{1}_C(x) \lesssim |A|^{\frac{1}{2}}\,|B|^{\frac{1}{2}}\,|C|^{\frac{1}{2}}$$
  - inégalité fondamentale :
    $$\int_G dx\,(f*g)(x)\,h(x) \lesssim \int_G dx\,(f^*_{\text{rad}} * g^*_{\text{rad}})(x)\,h^*_{\text{rad}}(x)$$
    où $f^*_{\text{rad}}(r) = f^*(|B_r|)$ réarrangement radial sur G
  - $G = \mathbb{R}^n$: F. Riesz
- rang supérieur
  - espaces d'Orlicz
    $$\|f\|_{O^{p,1}} = \int_0^\infty dt\,(1+t)^{-\frac{1}{p'}}\,[\log(2+t)]^{\frac{d}{p'}}\,f^*(t)$$
    où $d = \begin{cases} \ell-1 & \text{si } 1<p<2 \\ \ell+2|\Sigma_0^+| & \text{si } p=2 \end{cases}$
  - démonstration $\rightsquigarrow$ Fourier …

Kunze–Stein *sharp*

- rang 1
  - démonstration $\rightsquigarrow$ estimation
    $$\int_G dx\,(\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B)(x)\,\mathbb{1}_C(x) \lesssim |A|^{\frac{1}{2}}\,|B|^{\frac{1}{2}}\,|C|^{\frac{1}{2}}$$
  - inégalité fondamentale :
    $$\int_G dx\,(f*g)(x)\,h(x) \lesssim \int_G dx\,(f^*_{\mathrm{rad}} * g^*_{\mathrm{rad}})(x)\,h^*_{\mathrm{rad}}(x)$$
    où $f^*_{\mathrm{rad}}(r) = f^*(|B_r|)$ réarrangement radial sur G
  - $G = \mathbb{R}^n$: F. Riesz
- rang supérieur
  - espaces d'Orlicz
    $$\|f\|_{O^{p,1}} = \int_0^\infty dt\,(1+t)^{-\frac{1}{p'}}\,[\log(2+t)]^{\frac{d}{p'}}\,f^*(t)$$
    où $d = \begin{cases} \ell - 1 & \text{si } 1 < p < 2 \\ \ell + 2|\Sigma_0^+| & \text{si } p = 2 \end{cases}$
  - démonstration $\rightsquigarrow$ Fourier ...

Kunze–Stein *sharp*

- rang 1
  - démonstration $\rightsquigarrow$ estimation
    $$\int_G dx\,(\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B)(x)\,\mathbb{1}_C(x) \lesssim |A|^{\frac{1}{2}}\,|B|^{\frac{1}{2}}\,|C|^{\frac{1}{2}}$$
  - inégalité fondamentale :
    $$\int_G dx\,(f*g)(x)\,h(x) \lesssim \int_G dx\,(f^*_{\text{rad}} * g^*_{\text{rad}})(x)\,h^*_{\text{rad}}(x)$$
    où $f^*_{\text{rad}}(r) = f^*(|B_r|)$ réarrangement radial sur G
  - $G = \mathbb{R}^n$: F. Riesz
- rang supérieur
  - espaces d'Orlicz
    $$\|f\|_{O^{p,1}} = \int_0^{\infty} dt\,(1+t)^{-\frac{1}{p'}}\,[\log(2+t)]^{\frac{d}{p'}}\,f^*(t)$$
    $$\text{où } d = \begin{cases} \ell - 1 & \text{si } 1 < p < 2 \\ \ell + 2|\Sigma_0^+| & \text{si } p = 2 \end{cases}$$
  - démonstration $\rightsquigarrow$ Fourier ...

Kunze–Stein *sharp*

- rang 1
  - démonstration $\rightsquigarrow$ estimation
    $$\int_G dx\,(\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B)(x)\,\mathbb{1}_C(x) \lesssim |A|^{\frac{1}{2}}\,|B|^{\frac{1}{2}}\,|C|^{\frac{1}{2}}$$
  - inégalité fondamentale :
    $$\int_G dx\,(f*g)(x)\,h(x) \lesssim \int_G dx\,(f^*_{\text{rad}} * g^*_{\text{rad}})(x)\,h^*_{\text{rad}}(x)$$
    où $f^*_{\text{rad}}(r) = f^*(|B_r|)$ réarrangement radial sur G
  - $G = \mathbb{R}^n$: F. Riesz
- rang supérieur
  - espaces d'Orlicz
    $$\|f\|_{O^{p,1}} = \int_0^\infty dt\,(1+t)^{-\frac{1}{p'}}\,[\log(2+t)]^{\frac{d}{p'}}\,f^*(t)$$
    où $d = \begin{cases} \ell - 1 & \text{si } 1 < p < 2 \\ \ell + 2|\Sigma_0^+| & \text{si } p = 2 \end{cases}$
  - démonstration $\rightsquigarrow$ Fourier ...

Kunze–Stein *sharp*

- rang 1
  - démonstration $\rightsquigarrow$ estimation
    $$\int_G dx\, (\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B)(x)\, \mathbb{1}_C(x) \lesssim |A|^{\frac12}\, |B|^{\frac12}\, |C|^{\frac12}$$
  - inégalité fondamentale :
    $$\int_G dx\, (f*g)(x)\, h(x) \lesssim \int_G dx\, (f^*_{\mathrm{rad}} * g^*_{\mathrm{rad}})(x)\, h^*_{\mathrm{rad}}(x)$$
    où $f^*_{\mathrm{rad}}(r) = f^*(|B_r|)$ réarrangement radial sur G
  - $G = \mathbb{R}^n$: F. Riesz
- rang supérieur
  - espaces d'Orlicz
    $$\|f\|_{O^{p,1}} = \int_0^\infty dt\, (1+t)^{-\frac{1}{p'}} [\log(2+t)]^{\frac{d}{p'}} f^*(t)$$
    où $d = \begin{cases} \ell - 1 & \text{si } 1 < p < 2 \\ \ell + 2|\Sigma_0^+| & \text{si } p = 2 \end{cases}$
  - démonstration $\rightsquigarrow$ Fourier ...

Kunze–Stein *sharp*

- rang 1
  - démonstration $\rightsquigarrow$ estimation
    $$\int_G dx\,(1\!\!1_A * 1\!\!1_B)(x)\,1\!\!1_C(x) \lesssim |A|^{\frac12}\,|B|^{\frac12}\,|C|^{\frac12}$$
  - inégalité fondamentale :
    $$\int_G dx\,(f*g)(x)\,h(x) \lesssim \int_G dx\,(f^*_{\mathrm{rad}} * g^*_{\mathrm{rad}})(x)\,h^*_{\mathrm{rad}}(x)$$
    où $f^*_{\mathrm{rad}}(r) = f^*(|B_r|)$ réarrangement radial sur G
  - $G = \mathbb{R}^n$: F. Riesz
- rang supérieur
  - espaces d'Orlicz
    $$\|f\|_{O^{p,1}} = \int_0^\infty dt\,(1+t)^{-\frac{1}{p'}}\,[\log(2+t)]^{\frac{d}{p'}}\,f^*(t)$$
    où $d = \begin{cases} \ell - 1 & \text{si } 1<p<2 \\ \ell + 2|\Sigma_0^+| & \text{si } p=2 \end{cases}$
  - démonstration $\rightsquigarrow$ Fourier . . .

Kunze–Stein *sharp*

- rang 1
  - démonstration $\rightsquigarrow$ estimation
    $$\int_G dx\,(\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B)(x)\,\mathbb{1}_C(x) \lesssim |A|^{\frac{1}{2}}\,|B|^{\frac{1}{2}}\,|C|^{\frac{1}{2}}$$
  - inégalité fondamentale :
    $$\int_G dx\,(f*g)(x)\,h(x) \lesssim \int_G dx\,(f_{\mathrm{rad}}^* * g_{\mathrm{rad}}^*)(x)\,h_{\mathrm{rad}}^*(x)$$
    où $f_{\mathrm{rad}}^*(r) = f^*(|B_r|)$ réarrangement radial sur G
  - $G = \mathbb{R}^n$: F. Riesz
- rang supérieur
  - espaces d'Orlicz
    $$\|f\|_{O^{p,1}} = \int_0^\infty dt\,(1+t)^{-\frac{1}{p'}}\,[\log(2+t)]^{\frac{d}{p'}}\,f^*(t)$$
    où $d = \begin{cases} \ell-1 & \text{si } 1<p<2 \\ \ell+2|\Sigma_0^+| & \text{si } p=2 \end{cases}$
  - démonstration $\rightsquigarrow$ Fourier ...

Kunze–Stein *sharp*

- rang 1
  - démonstration $\rightsquigarrow$ estimation
    $$\int_G dx\,(\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B)(x)\,\mathbb{1}_C(x) \lesssim |A|^{\frac{1}{2}}\,|B|^{\frac{1}{2}}\,|C|^{\frac{1}{2}}$$
  - inégalité fondamentale :
    $$\int_G dx\,(f*g)(x)\,h(x) \lesssim \int_G dx\,(f^*_{\mathrm{rad}} * g^*_{\mathrm{rad}})(x)\,h^*_{\mathrm{rad}}(x)$$
    où $f^*_{\mathrm{rad}}(r) = f^*(|B_r|)$ réarrangement radial sur G
  - $G = \mathbb{R}^n$: F. Riesz
- rang supérieur
  - espaces d'Orlicz
    $$\|f\|_{O^{p,1}} = \int_0^\infty dt\,(1+t)^{-\frac{1}{p'}}\,[\log(2+t)]^{\frac{d}{p'}}\,f^*(t)$$
    $$\text{où } d = \begin{cases} \ell - 1 & \text{si } 1<p<2 \\ \ell + 2|\Sigma_0^+| & \text{si } p=2 \end{cases}$$
  - démonstration $\rightsquigarrow$ Fourier ...

Kunze–Stein *sharp*

- rang 1
  - démonstration $\rightsquigarrow$ estimation
    $$\int_G dx\,(\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B)(x)\,\mathbb{1}_C(x) \lesssim |A|^{\frac{1}{2}}\,|B|^{\frac{1}{2}}\,|C|^{\frac{1}{2}}$$
  - inégalité fondamentale :
    $$\int_G dx\,(f*g)(x)\,h(x) \lesssim \int_G dx\,(f^*_{\text{rad}} * g^*_{\text{rad}})(x)\,h^*_{\text{rad}}(x)$$
    où $f^*_{\text{rad}}(r) = f^*(|B_r|)$ réarrangement radial sur G
  - $G = \mathbb{R}^n$: F. Riesz
- rang supérieur
  - espaces d'Orlicz
    $$\|f\|_{O^{p,1}} = \int_0^\infty dt\,(1+t)^{-\frac{1}{p'}}\,[\log(2+t)]^{\frac{d}{p'}}\,f^*(t)$$
    où $d = \begin{cases} \ell - 1 & \text{si } 1 < p < 2 \\ \ell + 2|\Sigma_0^+| & \text{si } p = 2 \end{cases}$
  - démonstration $\rightsquigarrow$ Fourier ...

Références

- M.G. Cowling, *The Kunze–Stein phenomenon*, Ann. Math. 107 (1978), 209–234
- M.G. Cowling, *Herz “principe de majoration” and the Kunze–Stein phenomenon*, dans *Harmonic analysis and number theory* (*Montreal 1996*), CMS Conf. Proc. 21, Amer. Math. Soc. (1997), 73–88
- C.S. Herz, *Sur le phénomène de Kunze–Stein*, C. R. Acad. Sci. Paris Série A 271 (1971), 491–493
- A.D. Ionescu, *An endpoint fot the Kunze–Stein phenomenon and related maximal operators*, Ann. Math. 152 (2000), 259–275
- A.D. Ionescu, *Rearrangement inequalities on semisimple Lie groups*, Math. Ann. 332 (2005), 739–758

Références

- R.A. Kunze & E.M. Stein, *Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the* 2×2 *unimodular group*, Amer. J. Math. 82 (1960), 1–62
- N. Lohoué & Th. Rychener, *Some function spaces on symmetric spaces related to convolution operators*, J. Funct. Anal. 55 (1984), 200–219
- T. Pytlik, *Radial convolutors on free groups*, Studia Math. 78 (1984), 179–183
- A. Veca, *The Kunze–Stein phenomenon on the isometry group of a tree*, Bull. Austral. Math. Soc. 65 (2002), 153–174