Représentation des groupes finis

1 G-module

Définition 1 – G-module. Soient k un corps et G un groupe fini. Un G-module est un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'un morphisme de groupe $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)}$. Le morphisme ρ est appelé morphisme structurel ou morphisme associé à la structure de G-module de V. On dit alors que V est une représentation de G. Lorsqu'on a besoin de préciser le corps de base, on note kG-module plutôt que G-module.

Définition 2 – G-morphisme. Soient k un corps, G un groupe fini et $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ deux G-modules. Pour $i = 1, 2$, on note $\rho_i : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V}_i)$ le morphisme structurel. Un G-morphisme (ou morphisme de G-module) $f : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ est une application k-linéaire telle que $f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. On note $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ l'espace vectoriel des G-morphismes de V_1 dans V_2.

Définition 3 – G-isomorphisme. Soient k un corps, G un groupe fini et $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ deux G-modules et $f : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ un G-morphisme. S'il existe un G-morphisme $f' : \mathrm{V}_2 \to \mathrm{V}_1$ tel que $f \circ f' = \mathrm{id}_{\mathrm{V}_2}$ et $f' \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{V}_1}$, on dit que f est un G-isomorphisme. On vérifie aisément qu'un G-morphisme bijectif est un G-isomorphisme. On dit que V_1 et V_2 sont G-isomorphes (ou plus simplement isomorphe s'il n'y a pas d'ambiguité) s'il existe un G-isomorphisme $f : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$. On note alors $\mathrm{V}_1 \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \mathrm{V}_2$.

Définition 4 – Sous-G-module. Soient k un corps, G un groupe fini, V un G-module et $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)}$ le morphisme structurel. Un sous-G-module de V est un sous-espace vectoriel stable par $\rho(g)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$.

Soient k un corps, G un groupe fini et V un G-module. Pour $x \in \mathrm{V}$ et $g \in \mathrm{V}$, on utilise les notations suivantes pour désigner $\rho(g)(x)$:

$$\rho(g)(x) = \rho_g(x) = \rho_g x = gx = g \cdot x = g_{\mathrm{V}} x.$$

Définition 5 – G-invariants. Soient k un corps, G un groupe fini et V un G-module. L'ensemble

$$\mathrm{V}^{\mathrm{G}} = \{x \in \mathrm{V}, \qquad \forall\, g \in \mathrm{G}, \quad gx = x\}$$

est un sous-G-module de V appelé l'ensemble des invariants (ou des G-invariants) de V.

Exercice 1 – Construction de G-modules. Soient $\mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ et W quatre G-modules dont on note respectivement $\rho_{\mathrm{V}}, \rho_1, \rho_2$ et ρ_{W} les morphismes structurels.

a) Montrer que l'application ρ, définie par $\rho(g) = \mathrm{id}_k$ pour tout $g \in \mathrm{G}$, munit k d'une structure de G-module.

b) Déterminer le nombre de classe d'isomorphisme de structure de G-module sur k.

c) Soit V' un sous-G-module de V. Munir V' et V/V' d'une structure de G-module.

d) Montrer que l'application ρ définie par

$$\rho\colon \begin{cases} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)) \\ g \longmapsto (f \mapsto \rho_2(g) \circ f \circ \rho_1(g^{-1})) \end{cases}$$

munit $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ d'une structure de G-module. En déduire une structure de G-module sur V^*.

e) Montrer que l'application ρ définie par

$$\rho\colon \begin{cases} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2) \\ g \longmapsto \rho_1(g) \oplus \rho_2(g) \end{cases}$$

munit $\mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$ d'une structure de G-module.

f) Montrer que l'application ρ définie par

$$\rho\colon \begin{cases} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2) \\ g \longmapsto \rho_1(g) \otimes \rho_2(g) \end{cases}$$

munit $\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2$ d'une structure de G-module.

g) Montrer que l'application ρ définie par

$$\rho\colon \begin{cases} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2, \mathrm{W})) \\ g \longmapsto \big[\, \mathrm{B} \mapsto \big((x,y) \mapsto \rho_{\mathrm{W}}(g)\mathrm{B}(\rho_1(g^{-1})(x), \rho_2(g^{-1})(y)) \big) \,\big] \end{cases}$$

munit $\mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2, \mathrm{W})$ d'une structure de G-module. En déduire une structure de G-module sur $\mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}, k)$.

h) Soit $k \to k'$ une extension de corps. Munir $k' \otimes \mathrm{V}$ d'une structure de $k'\mathrm{G}$-module.

Définition 6 – Représentation unité. La représentation définie à la question **a** de l'exercice 1 s'appelle la représentation unité ou encore la représentation triviale. Lorsqu'est utilisée une structure de G-module sur k sans précision, il s'agit de la représentation unité.

Exercice 2 – Morphisme. Soient $\mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{W}$ quatre G-modules.

a) Montrer que $\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \in \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$.

b) Soient $u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{V}_1)$ et $v \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$. Montrer que $v \circ u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{V}_2)$.

c) Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$, montrer que $f(\mathrm{V}^{\mathrm{G}}) \subset \mathrm{W}^{\mathrm{G}}$. Si f est un G-isomorphisme, montrer que $f(\mathrm{V}^{\mathrm{G}}) = \mathrm{W}^{\mathrm{G}}$.

d) Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$, montrer que $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont des sous-G-modules respectivement de W et V.

e) Soit V' un sous-G-module de V. Montrer que l'inclusion $i : \mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ est un morphisme de G-module.

f) Soit V' un sous-G-module de V. Montrer que la surjection canonique $\pi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}/\mathrm{V}'$ est un morphisme de G-module. Montrer aussi que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ tel que $f \circ i = 0$, il existe une unique application $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}/\mathrm{V}', \mathrm{W})$ telle que $\overline{f} \circ \pi = f$.

g) Montrer que ${\mathrm{V}_1}^* \otimes \mathrm{V}_2$ et $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ sont G-isomorphes.

h) Montrer que ${\mathrm{V}_1}^* \otimes {\mathrm{V}_2}^*$, $(\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2)^*$, $\mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2, k)$ et $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, {\mathrm{V}_2}^*)$ sont G-isomorphes.

i) Montrer que $\mathrm{V} \otimes k$, V et $\mathrm{Hom}_k(k, \mathrm{V})$ sont G-isomorphes.

Exercice 3 – Sous-G-module. Soient $\mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{W}$ quatre G-modules.

a) Déterminer $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)^{\mathrm{G}}$.

b) Montrer que $(\mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2)^{\mathrm{G}} = {\mathrm{V}_1}^{\mathrm{G}} \oplus {\mathrm{V}_2}^{\mathrm{G}}$.

c) Montrer que le crochet de la dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{V},\mathrm{V}^*} \in \mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}^*, k)$ est G-invariant.

d) Montrer que $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ est un sous-G-module de $\mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}, \mathrm{W})$. Déterminer le sous-G-module de $\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}^*$ correspondant à $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)$ via l'isomorphisme de la question **h** de l'exercice 1.

e) Montrer que $\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ est un sous-G-module de $\mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}, \mathrm{W})$. Déterminer le sous-G-module de $\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}^*$ correspondant à $\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k)$ via l'isomorphisme de la question **h** de l'exercice 1.

Pour les questions **f** et **g**, on suppose $\mathrm{car}\, k \neq 2$.

f) Montrer que $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)$ est G-isomorphe à $\mathrm{S}^2(\mathrm{V}^*) = (\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}^*)/\langle x \otimes y - y \otimes x, \quad x, y \in \mathrm{V}^* \rangle$.

g) Montrer que $\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k)$ est G-isomorphe à $\Lambda^2(\mathrm{V}^*) = (\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}^*)/\langle x \otimes x, \quad x \in \mathrm{V}^* \rangle$.

2 Caractère

Définition 7 – Caractère. Soient V un G-module et ρ le morphisme structurel. On appelle caractère de la représentation V et on note χ_{V} la fonction définie par

$$\chi_{\mathrm{V}}\colon \begin{cases} \mathrm{G} \longrightarrow k \\ g \longmapsto \mathrm{tr}\,(\rho(g))\,. \end{cases}$$

On appelle caractère de G une fonction $\chi : \mathrm{G} \to k$ telle qu'il existe un G-module V telle que $\chi = \chi_{\mathrm{V}}$.

Exercice 4 – Caractère. Soient V et W deux G-modules.

a) Montrer que si V et W sont isomorphes alors $\chi_{\mathrm{V}} = \chi_{\mathrm{W}}$.

b) Calculer $\chi_{\mathrm{V}}(1)$.

c) Calculer χ_k.

d) Calculer $\chi_{\mathrm{V}\oplus\mathrm{W}}$, χ_{V^*}, $\chi_{\mathrm{V}\otimes\mathrm{W}}$ et $\chi_{\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V},\mathrm{W})}$ en fonction de χ_{V} et χ_{W}.

Exercice 5 — Fonctions sur G. On appelle $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence de conjugaison sur G :

$$g\mathscr{R}h \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathrm{G}, \quad g = khk^{-1}.$$

On note $\mathscr{F}(\mathrm{G}, k)$ (resp. $\mathscr{F}(\mathrm{G}/\mathscr{R}, k)$) la k-algèbre des fonctions de G dans k (resp. de $\mathrm{G}/\mathscr{R}$ dans k). La propriété universelle du quotient permet d'identifier $\mathscr{F}(\mathrm{G}/\mathscr{R}, k)$ à la sous-k-algèbre de $\mathscr{F}(\mathrm{G}, k)$ des fonctions centrales c'est-à-dire la sous-k-algèbre formée des fonctions constantes sur les classes de conjugaison.

a) Montrer que la fonction

$$\sigma\colon \begin{cases} \mathscr{F}(\mathrm{G}, k) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathrm{G}, k) \\ \quad \mathrm{F} \qquad \longmapsto \ (\, g \mapsto \mathrm{F}(g^{-1})\,)\,. \end{cases}$$

est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathrm{G}, k)$ stabilisant l'espace des fonctions centrales.

b) Soit $\mathrm{Car}_{\mathrm{G}}$ l'espace vectoriel engendré par les caractères. Montrer que $\mathrm{Car}_{\mathrm{G}}$ forme une sous-k-algèbre stable par σ de l'espaces des fonctions centrales.

On suppose pour la question **c** que $\operatorname{car} k$ ne divise pas $|\mathrm{G}|$.

c) Montrer que la fonction

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \begin{cases} \mathscr{F}(\mathrm{G}, k) \times \mathscr{F}(\mathrm{G}, k) \longrightarrow k \\ \qquad (\mathrm{F}, \mathrm{F}') \qquad \longmapsto \dfrac{1}{|\mathrm{G}|}\displaystyle\sum_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{F}(g)\mathrm{F}'(g^{-1}) = \dfrac{1}{|\mathrm{G}|}\displaystyle\sum_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{F}(g)\sigma(\mathrm{F}')(g)\,. \end{cases}$$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et que sa restriction à l'espace des fonctions centrales est non dégénérée.

3 Exemple

Exercice 6 — Représentation d'action de groupe. Soit X un ensemble fini sur lequel G agit. On note $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$ la k-algèbre des fonctions de X dans k et e_x la fonction définie par $e_x(y) = \delta_{xy}$ pour $y \in \mathrm{X}$.

a) Montrer que la famille $(e_x)_{x\in\mathrm{X}}$ forme une base de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$.

b) Munir $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$ d'une structure de G-module. Montrer que pour cette structure, on a $ge_x = e_{gx}$.

c) Montrer que $\dim_k \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}} = |\mathrm{X}/\mathrm{G}|$.

d) Montrer que $\chi_{\mathscr{F}(\mathrm{X},k)}(g) = |\mathrm{X}^g|$ où $\mathrm{X}^g = \{x \in \mathrm{X}, \quad gx = x\}$.

Définition 8 — Représentation régulière. Lorsque G agit sur lui-même par multiplication à gauche, la représentation obtenue comme dans l'exercice 6 s'appelle la représentation régulière de G. On note χ_{reg} le caractère de la représentation régulière.

Exercice 7 — Représentation régulière.

a) Calculer χ_{reg}.

Dans la question **b**, on suppose que $\operatorname{car} k$ ne divise par $|\mathrm{G}|$.

b) Soit V un G-module. Montrer que $\langle \chi_{\mathrm{reg}}, \chi_{\mathrm{V}} \rangle = \dim_k(\mathrm{V})$.

4 Semisimplicité

Définition 9 — G-module irréductible. Soit V un G-module. On dit que V est irréductible (ou simple) si $\mathrm{V} \neq 0$ et les seuls sous-G-modules de V sont $\{0\}$ et V.

Définition 10 — Caractère irréductible. Soit χ un caractère de G. On dit que χ est irréductible (ou simple) si χ est le caractère d'un G-module irréductible.

Définition 11 — G-module indécomposable. Soit V un G-module. On dit que V est indécomposable si pour toute décomposition $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$ où V_1 et V_2 deux sous-G-modules alors $\mathrm{V}_1 = 0$ ou $\mathrm{V}_2 = 0$.

Définition 12 — G-module semisimple. Soit V un G-module. On dit que V est semisimple (ou complètement réductible) si pour tout sous-G-module V' de V, il existe un sous-G-module V'' de V supplémentaire de V'.

Exercice 8 – Lemme de Schur. Soient V, W deux G-modules irréductibles.

a) Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$. Montrer que f est nul ou un isomorphisme.

b) En déduire que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}) = 0$ ou V et W sont isomorphes.

c) Montrer que $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ est une k-algèbre à division.

Pour les questions **d** et **e**, on suppose que k est algébriquement clos.

d) Montrer que $f \in \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ est une homothétie.

e) En déduire que $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}) = 1$ si V et W sont isomorphes et $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}) = 0$ sinon.

Pour les exercices 9 et 10, on suppose que $\mathrm{car}\, k$ ne divise pas $|\mathrm{G}|$.

Exercice 9 – Semisimplicité. Soient V, W deux G-modules. On note ρ le morphisme structurel associé à V.

a) Montrer que $p_{\mathrm{V}} = |\mathrm{G}|^{-1} \sum\limits_{g \in \mathrm{G}} \rho(g) \in \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ est un projecteur d'image V^{G}.

b) En déduire que $\dim_k(\mathrm{V}^{\mathrm{G}}) 1_k = |\mathrm{G}|^{-1} \sum\limits_{g \in \mathrm{G}} \chi_{\mathrm{V}}(g) = \langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_k \rangle$.

c) Montrer que $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{W}} \rangle = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W}, \mathrm{V}) 1_k = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}) 1_k$.

d) Montrer que si $\dim_k \mathrm{V} = 1$ alors $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{V}} \rangle = 1_k$.

e) Théorème de Maschke. Soient V' un sous-G-module de V et p un projecteur k-linéaire d'image V'. Montrer, à l'aide de $p_{\mathrm{End}_k(\mathrm{V})}(p)$, que V' admet un sous-G-module supplémentaire. En déduire que V est semisimple.

f) Montrer que V est irréductible si et seulement si V est non nul et indécomposable.

g) Montrer que V est somme directe de modules irréductibles.

h) En déduire que $\mathrm{Car}_{\mathrm{G}}$ est engendré par les caractères irréductibles.

Exercice 10 – Orthogonalité. Soient V, W deux G-modules. On note ρ le morphisme structurel associé à V.

a) On suppose que V et W sont irréductibles et ne sont pas G-isomorphes. Montrer que $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{W}} \rangle = 0$.

On suppose pour les questions **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g**, **h** et **i** que $\mathrm{car}\, k = 0$.

b) Montrer que $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{W}} \rangle$ est un entier naturel.

c) On suppose V et W irréductibles. Montrer les équivalences

$$\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{W}} \rangle > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{W}} \rangle \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{V} \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \mathrm{W} \quad \Longleftrightarrow \quad \chi_{\mathrm{V}} = \chi_{\mathrm{W}} .$$

d) En déduire que le nombre de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles est égal au nombre de caractères irréductibles et que ce nombre est inférieur ou égal au nombre de classes de conjugaison de G.

On note $\chi_1, \ldots, \chi_s$ les caractères irréductibles de G et V_i un G-module irréductible de caractère χ_i. Tout G-module irréductible est donc G-isomorphe à un et un seul des V_i.

e) Montrer qu'il existe une unique famille $(d_1(\mathrm{V}), \ldots, d_s(\mathrm{V})) \in \mathbb{N}^s$ telle que $\chi_{\mathrm{V}} = d_1(\mathrm{V})\chi_1 + \cdots + d_s(\mathrm{V})\chi_s$. L'entier $d_i(\mathrm{V})$ s'appelle la multiplicité de V_i (ou de χ_i) dans V (ou dans χ_{V}).

f) Montrer les égalités $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_i \rangle = d_i(\mathrm{V}) \langle \chi_i, \chi_i \rangle$ pour tout $i \in [\![1\,,\, s]\!]$ et $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{V}} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{s} d_i(\mathrm{V})^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle$.

g) Montrer les équivalences $\mathrm{V} \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \mathrm{W} \quad \Longleftrightarrow \quad \chi_{\mathrm{V}} = \chi_{\mathrm{W}} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, i \in [\![1\,,\, s]\!], \quad d_i(\mathrm{V}) = d_i(\mathrm{W})$.

h) On note d_i^{reg} la multiplicité de χ_i dans χ_{reg}. Montrer que

$$\forall\, i \in [\![1\,,\, s]\!], \qquad d_i^{\mathrm{reg}} = \frac{\dim \mathrm{V}_i}{\langle \chi_i, \chi_i \rangle} \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{G}| = \sum_{i=1}^{s} \frac{(\dim \mathrm{V}_i)^2}{\langle \chi_i, \chi_i \rangle} .$$

i) Montrer que si $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{V}} \rangle = 1$ alors V est irréductible.

Pour les questions **j**, **k**, **l**, **m** et **n**, on suppose que $\mathrm{car}\, k = 0$ et k algébriquement clos.

j) Montrer que $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{V}} \rangle = 1$ si et seulement si V est irréductible.

k) Montrer que $d_i^{\mathrm{reg}} = \dim \mathrm{V}_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\, s]\!]$ et $|\mathrm{G}| = \sum\limits_{i=1}^{s} (\dim \mathrm{V}_i)^2$.

Pour les questions **l**, **m** et **n**, f désigne une fonction centrale. On définit alors $\varphi_{\mathrm{V}} = \sum\limits_{g \in \mathrm{G}} f(g) \rho_{\mathrm{V}}(g^{-1})$.

l) On suppose que V est irréductible. Montrer que φ_{V} est une homothétie de rapport $(|\mathrm{G}| \dim(\mathrm{V})^{-1} \langle f, \chi_{\mathrm{V}} \rangle)$.

m) En déduire, à l'aide de la représentation régulière, que si f est orthogonale à tous les caractères irréductibles alors f est nulle.

n) En déduire que le nombre de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G.

5 Applications

Exercice 11 – Représentation d'action de groupe. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X.

a) Montrer la formule de Burnside
$$\frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}|\mathrm{X}^g| = |\mathrm{X}/\mathrm{G}|.$$

Pour les questions **b**, **c**, **d**, **e** et **f**, on suppose $|\mathrm{X}| \geqslant 2$ et $|\mathrm{X}/\mathrm{G}| = 1$.

b) Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{G}$ sans point fixe.

c) Montrer les équivalence des propriétés suivantes.

(i) L'action de G sur X est doublement transitive c'est-à-dire que pour tous $x \neq y$, $x' \neq y'$, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $gx = x'$ et $gy = y'$.

(ii) L'action de G sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ a deux orbites : la diagonale et son complémentaire.

(iii) $\sum_{g\in\mathrm{G}}|\mathrm{X}^g|^2 = 2|\mathrm{G}|$.

Pour les questions **d**, **e** et **f**, on considère un corps de caractéristique nulle k et l'action de G sur $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$ définie dans l'exercice 6. D'après la question **e** de l'exercice 9, $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}}$ admet un G-module supplémentaire V.

d) Déterminer V.

e) Montrer que si les propriétés de la question **c** sont vérifiées alors V est un G-module irréductible. En déduire les sous-G-modules de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$.

f) Montrer que si V est un G-module irréductible et k est algébriquement clos alors les propriétés de la question **c** sont vérifiées.

Exemple 13 – Groupe de permutations. Pour $n \geqslant 2$, le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit de façon doublement transitive sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ qui a plus de deux éléments. Les résultats des questions **d**, **e** et **f** de l'exercice 11 s'appliquent.

Définition 14 – Représentation réelle. Soient G un groupe fini et V un $\mathbb{C}$G-module. On dit que la représentation V est une représentation réelle s'il existe un $\mathbb{R}$G-module V′ tel que $\mathrm{V} \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{V}'$.

Exercice 12 – Forme bilinéaire invariante : indicateur de Frobenius-Schur. Soient G un groupe fini et V une représentation de G sur $\mathbb{C}$ de dimension finie de caractère χ.

a) Prouver que χ est à valeurs réelles si et seulement s'il existe une forme bilinéaire G-invariante non dégénérée sur V.

b) On suppose que la représentation V est une représentation réelle. Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique G-invariante non dégénérée sur V (On pourra considérer un produit scalaire G-invariant sur V′ et l'étendre à V).

Pour les questions **c**, **d** et **e**, on suppose qu'il existe une forme bilinéaire b symétrique G-invariante non dégénérée sur V.

c) Montrer qu'il existe sur V un produit scalaire hermitien G-invariant B (on suppose que la semilinéarité a lieu sur la seconde variable).

d) Montrer que
$$\forall\, w \in \mathrm{W}, \quad \exists\,!\, \varphi(w) \in \mathrm{V}, \quad \forall\, v \in \mathrm{V}, \qquad b(w, v) = \overline{\mathrm{B}(\varphi(w), v)}.$$

Montrer que l'application φ est semilinéaire et commute avec $\rho(g)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Montrer que φ^2 est hermitien défini positif.

e) Soit ψ l'endomorphisme hermitien defini positif vérifiant $\psi^2 = \varphi^2$. En considérant $\sigma = \varphi\psi^{-1}$, montrer que la représentation V est réelle.

Pour les questions **f** et **g**, on suppose que la représentation V est irréductible.

f) Soit b une forme bilinéaire G-invariante sur V. Montrer que b est nulle ou non dégénérée. On suppose que b est non dégénérée, montrer que toute forme bilinéaire G-invariante sur V est proportionnelle à b. En déduire que b est symétrique ou antisymétrique.

g) Montrer que
$$\frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in \mathrm{G}} \chi(g^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \neq \overline{\chi} \\ 1 & \text{si } \chi = \overline{\chi} \text{ et } \rho \text{ réel} \\ -1 & \text{si } \chi = \overline{\chi} \text{ et } \rho \text{ non réel} \end{cases}$$

Pour les questions **h** et **i**, on suppose que G agit sur V comme un groupe de réflexions complexes irréductible.

h) Montrer que G est un groupe de Coxeter si et seulement si l'un des d_i est 2.

i) Montrer que le troisième cas de la question **g** ne peut arriver.