UNIVERSITE D'ORLEANS

Licence de Mathématique, 5MT02
année 2008-2009
Mercredi 5 novembre 2008

Examen Partiel

Durée : 2 heures

L'usage de tout document et de tout matériel électronique (ordinateur, calculatrice, téléphone portable...) est interdit.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 *(Question de cours)*
1- Donner la définition d'un endomorphisme orthogonal.

2- Donner dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^2$ un exemple d'endomorphisme orthogonal, ainsi qu'un exemple d'endomorphisme qui n'est pas orthogonal.

Exercice 2
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$, le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Étant donnés deux éléments de $\mathbb{R}[X]$, P et Q, on pose :

$$\langle P \, , \, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt\cdot$$

Question préliminaire Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \langle X^n \, , \, 1 \rangle$.

(a) Calculer I_0.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $I_n = nI_{n-1}$.

(c) En déduire que $I_n = n!$.

1- Montrer que $\langle . \, , \, . \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2- Extraire de $\{1, X\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

3-(a) Calculer la projection orthogonale de $P(X) = 1 + X + X^3$ sur $\mathbb{R}_1(X)$. On la note $\pi(P)$.

(b) Montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_1[X]$, on a :

$$||P - Q||^2 = ||P - \pi(P)||^2 + ||\pi(P) - Q||^2.$$

(c) En déduire la valeur de $\min\limits_{a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}} \left\{ \int_0^{+\infty} ((1-a) + (1-b)t + t^3)^2 e^{-t} dt \right\}$

Exercice 3
On considère sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{Z}$.

1-(a) Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On notera $\overline{x}$ la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$ pour cette relation, et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{R}$ par $\mathcal{R}$.

(b) Expliciter $\overline{0}$, puis exprimer $\overline{x+1}$, ainsi que $\overline{(-x)}$, en fonction de $\overline{x}$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\overline{x} \cap [0,1[$ est un singleton. On notera r_x son unique élément.

2-(a) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto [0,1[$, définie par $\varphi(\overline{x}) = r_x$ est une bijection.

(b) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\overline{x+y} = \overline{r_x + r_y}$.

3) On définit sur $[0,1[$ une loi de composition interne $\tilde{+}$ par : $x \tilde{+} y = r_{x+y}$.

(a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi interne et que $([0,1[, \tilde{+})$ est un groupe abélien.

(b) Décrire la structure de groupe transportée de $([0,1[, \tilde{+})$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par φ.

4) Étant donné $x \in [0,1[$, on note $< x >$ le sous-groupe engendré par x.

(a) Expliciter $< \frac{1}{2} >$, $< \frac{1}{3} >$, ainsi que $< \frac{3}{5} >$.

(b) Montrer que si $x \in \mathbb{Q}$, alors $< x >$ est d'ordre fini.

(c) Montrer que si $< x >$ est d'ordre fini alors $x \in \mathbb{Q}$.

Exercice 4
Soit $(G, \star)$ un groupe fini tel que $\forall x \in G$ on ait $x \star x = e$, où e est l'élément neutre de G. On suppose $G \neq \{e\}$.

1) Montrer que G est abélien.

2) Soit H un sous-groupe de G différent de G, et soit $a \in G$ tel que $a \notin H$.

(a) Montrer que $H \cap aH = \emptyset$.

(b) Montrer que $H \cup aH$ est un sous-groupe de G.

3) On suppose que G est d'ordre fini. On note H_0 le sous-groupe trivial $\{e\}$. On définit par récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, H_{n+1} : si $H_n \neq G$, on prend $a \in G \setminus H_n$, et on pose $H_{n+1} = H_n \cup aH_n$, si $H_n = G$ on pose $H_{n+1} = G$.

(a) Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, pour l'inclusion, de sous-groupes de G.

(b) Montrer que, ou bien $H_n \neq H_{n+1}$, auquel cas on a $[H_{n+1} : 1] = 2[H_n : 1]$, ou bien $H_n = H_{n+1}$, et alors $H_n = G$.

(c) Montrer qu'il existe un entier $N_G \geq 1$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_G \Rightarrow H_n = G, \quad \text{et} \quad n < N_G \Rightarrow H_n \neq G\cdot$$

(d) En déduire que $[G : 1] = 2^{N_G}$.