

Feuille d'exercices 8

Géométrie affine

1. (a) Rappeler la définition d'un espace affine.
 (b) Montrer que cette définition est équivalente à la définition suivante :
Définition : On appelle espace affine la donnée d'un ensemble non vide \mathcal{E} , d'un espace vectoriel \vec{E} et d'une application $f : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \vec{E}$ telle que
 - i. $\forall x \in \mathcal{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad \exists y \in \mathcal{E} \quad \vec{v} = f(x, y)$.
 - ii. $\forall (x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \quad f(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow x = y$.
 - iii. $\forall (x, y, z) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \quad f(x, y) + f(y, z) = f(x, z)$.

2. On considère $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ et $\vec{E} = \mathbb{R}^2$ et on définit l'action de \vec{E} sur \mathcal{E} de la manière suivante : $\forall X = (x, y) \in \mathcal{E} \quad \forall \vec{v} = (a, b) \in \vec{E} \quad X + \vec{v} = (x + a, y + b)$.
 - (a) Montrer que \mathcal{E} est un espace affine d'espace directeur \vec{E} .
 - (b) Caractériser les applications affines de \mathcal{E} .
 - (c) Étant donné $X = (x, y) \in \mathcal{E}$ donner une équation de tous les sous-espaces affines de \mathcal{E} qui contiennent X

3. Reprendre les questions de l'exercice précédent avec $\mathcal{E} = \vec{E} = \mathbb{R}^3$.

4. Soit \mathcal{E} le plan affine. Soit A, B et C trois points non-alignés de \mathcal{E} on considère les repères cartésiens $\mathcal{R} = \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ et $\mathcal{R}' = \{B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\}$.
 - (a) Si $M = (x, y)_{\mathcal{R}} = (x', y')_{\mathcal{R}'}$ Calculer x' et y' en fonction de x et de y .
 - (b) Donner une description de l'ensemble des points dont les coordonnées dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont les mêmes.

5. Soit \mathcal{E} le plan affine munit d'un repère cartésien $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; \mathcal{B}\}$. Soit $A = (a, b)_{\mathcal{R}}$ et $B = (c, d)_{\mathcal{R}}$ deux points de \mathcal{E} , et $\vec{v} = (v_1, v_2)_{\mathcal{B}}$ un vecteur de \vec{E} .
 - (a) Donner une équation cartésienne dans le repère \mathcal{R} de la droite passant par A et B .
 - (b) Donner une équation cartésienne dans le repère \mathcal{R} de la droite passant par A et de direction \vec{v} .

6. Soit \mathcal{E} l'espace affine de dimension trois munit d'un repère cartésien $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; \mathcal{B}\}$. Soit $A = (a_1, a_2, a_3)_{\mathcal{R}}$, $B = (b_1, b_2, b_3)_{\mathcal{R}}$ et $C = (c_1, c_2, c_3)_{\mathcal{R}}$ trois points non alignés de \mathcal{E} . Soit enfin $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_{\mathcal{B}}$ deux vecteurs non colinéaires de \vec{E} .
 - (a) Donner des équations cartésiennes dans le repère \mathcal{R} de la droite passant par A et B .
 - (b) Donner des équations cartésiennes dans le repère \mathcal{R} de la droite passant par A et de direction \vec{v} .
 - (c) Donner une équation du plan passant par A, B et C .
 - (d) Donner une équation du plan passant par A et engendré par (\vec{v}, \vec{u}) .

7. On considère $\mathcal{E} = \mathbb{R}_2[X]$ et $\vec{E} = \mathbb{R}^3$ et on définit l'action de \vec{E} sur \mathcal{E} de la manière suivante : $\forall P(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 \in \mathcal{E} \quad \forall \vec{v} = (a, b, c) \in \vec{E} \quad X + \vec{v} = (\alpha + a) + (\beta + b)X + (\gamma + c)X^2$.
 - (a) Montrer que \mathcal{E} est un espace affine d'espace directeur \vec{E} .
 - (b) Soit f l'application affine de \mathcal{E} telle que $f(1 + X^2) = X + 1$, $f^\#(1, 0, 0) = (1, 2, 0)$, $f^\#(0, 1, 1) = (0, 1, 0)$ et $f^\#(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$. Calculer $f(\alpha + \beta X + \gamma X^2)$.
 - (c) Donner l'équation de l'hyperplan affine de \mathcal{E} contenant les points $P_1 = X + 1$, $P_2 = X^2 - 2$ et $P_3 = X$.

8. Soit \mathcal{E} et \mathcal{E}' deux espaces affines et $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ deux applications affines. Montrer que f et g ont la même partie linéaire si, et seulement si, il existe une translation t telle que $g = t \circ f$.

9. Soit \mathcal{E} un espace affine sur un espace vectoriel E et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) f est une translation.

- (b) f est affine et sa partie linéaire $\vec{f} = \text{Id}_E$.
 (c) f commute avec toutes les translations.

En déduire le centre du groupe affine $\text{GA}(\mathcal{E})$ de \mathcal{E} .

10. Soit \mathcal{E} le plan affine. On considère deux homothéties h_1 et h_2 , de centre respectif A_1 et A_2 et de même rapport $\lambda \neq 0$. Quelle est la nature géométrique de la transformation $f := h_2 \circ h_1^{-1}$?

11. Soit \mathcal{E} un espace affine d'espace directeur \vec{E} de dimension n . On suppose donné un repère cartésien $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; \mathcal{B}\}$ où $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ est une base de \vec{E} , et on considère une application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.

- (a) Expliciter f sous forme matricielle dans le repère \mathcal{R} .
 À tout point $X = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$ on associe $\Psi(X) := (1, x_1, \dots, x_n)$ dans \mathbb{R}^{n+1} .
 (b) Écrire $\Psi(X + \vec{V})$, où $X \in \mathcal{E}$ et $\vec{V} = (v_1, \dots, v_n)_{\mathcal{B}}$.
 (c) Écrire $\Psi(f(X))$.
 (d) En déduire une expression matricielle de l'application $\Psi(X) \mapsto \Psi(f(X))$. On note $A_f \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice obtenue.
 (e) Si f et g sont deux applications affines calculer $A_{f \circ g}$ en fonction de A_f et de A_g .

12. Soit \mathcal{E} un espace affine d'espace directeur \vec{E} de dimension finie et H un hyperplan affine. Étant donné deux points M et N de \mathcal{E} , on note $[MN]$ le segment les joignant. On définit sur $\mathcal{E} \setminus H$ la relation \mathcal{R} par

$$M\mathcal{R}N \Leftrightarrow [MN] \cap H = \emptyset.$$

- (a) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
 (b) Montrer qu'il existe exactement deux classes d'équivalence pour cette relation.

13. Soit f une transformation affine d'un espace affine \mathcal{E} . Soit Δ une droite de \mathcal{E} . Montrer que l'ensemble des milieux des segments $[Mf(M)]$, pour M parcourant Δ , est une droite affine ou un point.

14. **-Examen de décembre 2001-**

Soit \mathcal{E} un espace affine d'espace directeur E . Soient A et B deux points de \mathcal{E} , F et G des sous-espaces vectoriels de E , \mathcal{F} (resp. \mathcal{G}) le sous-espace affine passant par A (resp. B) et de direction F (resp. G).

(a) On suppose que l'intersection de \mathcal{F} et \mathcal{G} est réduite à un point $\{O\}$.

- i. Montrer que F et G sont en somme directe.
 ii. Montrer que $\vec{AB} \in F \oplus G$.

(b) Réciproquement, on suppose que F et G sont en somme directe et que $\vec{AB} \in F \oplus G$.

- i. On décompose \vec{AB} en $\vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$. Montrer que $O = A + \vec{u}$ appartient à $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
 ii. Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{O\}$.

15. **-Examen de décembre 2000-**

Soient λ et μ des réels différents de 0, 1 et -1 et \mathcal{E} un espace affine de dimension finie et d'espace directeur E . On considère dans E deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G non réduits à $\{\vec{0}\}$; on désigne par p la projection sur F parallèlement à G et on pose $p' = \text{Id}_E - p$ et on note par O un point fixé dans \mathcal{E} .

(a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\varphi_k = \lambda^k p + \mu^k p'$ et $H = \{\psi \in \mathcal{L}(E) \mid \exists k \in \mathbb{Z} \ \psi = \varphi_k\}$.

- i. Montrer que φ est un homomorphisme du groupe \mathbb{Z} dans le groupe $\text{GL}(E)$.
 ii. Montrer que H est un groupe isomorphe à \mathbb{Z} .

(b) Soit $\mathcal{M} = \{f \in \mathcal{A}(E) \mid \vec{f} \in H\}$.

- i. Montrer que \mathcal{M} est un sous-groupe de $\text{GA}(E)$ contenant le sous-groupe $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ des translations.
 ii. Montrer que $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{M} \mid f(O) = O\}$ est un sous-groupe de \mathcal{M} isomorphe à \mathbb{Z} .
 iii. En déduire que \mathcal{M} est isomorphe à un produit semi-direct de E par \mathbb{Z} .

(c) Soit $f \in \mathcal{M}$ n'appartenant pas à $\mathcal{T}(\mathcal{E})$.

- i. Montrer que $\vec{f} - \text{Id}_E \in \text{GL}(E)$.
 ii. En déduire que f admet un unique point fixe A .

(d) i. Pour tout point $A \in \mathcal{E}$, justifier l'existence d'un unique $g_A \in \mathcal{M}$ tel que $g_A(A) = A$ et $\vec{g}_A = \varphi_1$.

ii. Montrer que $\vec{Og}_A(O) = ((1-\lambda)p + (1-\mu)p')(\vec{OA})$.

iii. Montrer que $g_A \circ g_O$ admet un unique point fixe B .

iv. Montrer que $\vec{OB} = \left(\frac{1}{1+\lambda} p + \frac{1}{1+\mu} p' \right) (\vec{OA})$.

v. En déduire que l'application ϑ qui à tout point A de \mathcal{E} associe l'unique point fixe B de $g_A \circ g_O$ est affine.