Travail à faire les 28, 29 et 30 septembre 2011

Le travail est à rendre pour le **vendredi 30 septembre à 14h** dans mon casier au bâtiment de maths (aucun travail ne pourra être accepté après cela). Vous avez droit à tout ce que vous voulez, y compris dicuter des exercices avec vos camarades. Le travail fourni sera pris en compte pour l'évaluation finale. Ceci correspond à une douzaine d'heure de travail, à faire durant les heures prévues de cours. Les problèmes abordés doivent être complètement traités et bien rédigés.

1 Le mercredi 28 septembre

1.1 Définitions

Rappeler les définitions suivantes: *espace vectoriel, application linéaire, forme linéaire, dual dun espace vectoriel, supplémentaire, base, base orthonormée, dimension d'un espace vectoriel, endomorphisme.*

1.2 Problèmes

On rappelle qu'un endomorphisme p d'un espace vectoriel E est un *projecteur* si il vérifie que $p \circ p = p$.

1. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique $\left\{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\right\}$, on définit l'endomorphisme $\varphi_{a,b}$ par $\varphi_{a,b}(x\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}) = a\,(x-2y)\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}} + b\,(2x+y)\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}$.
   Déterminer tous les réels a et b pour lesquels $\varphi_{a,b}$ est un projecteur de E et déterminer dans ce cas les éléments caractéristiques de $\varphi_{a,b}$.

2. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{C} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \overrightarrow{\mathbf{e_3}}\right\}$, on considère les deux endomorphismes p_1, p_2 donnés dans $\mathcal{C}$ par les deux matrices :

$$\mathcal{M}_{p_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{p_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Vérifier qu'il s'agit de projecteurs.
   Étudier directement leur somme et montrer que c'est un projecteur.

3. Soit E un espace vectoriel et $f : E \to E$ et $g : E \to E$ deux endomorphismes de E tels que $f + g = \mathrm{Id}$.
   (a) Montrer que f est un projecteur si et seulement si g est un projecteur[1].
   (b) Montrer que si f est un projecteur alors $\ker f = \mathcal{I}m\ g$ et $\ker g = \mathcal{I}m\ f$.

4. À quelle condition la somme $p + q$ de deux projecteurs p et q d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est–elle un projecteur ? Quels sont alors le noyau et l'image de $p + q$?

5. Soit E un espace vectoriel de dimension supérieure à 1. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que G est un sous-espace supplémentaire de F si $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$. On note alors $F \oplus G = E$.
   (a) En utilisant l'axiome de Zorn, montrer que tout sous-espace vectoriel F possède un sous-espace vectoriel supplémentaire.

[1] On dit que f et g sont deux projecteurs `associés`.

(b) Montrer que $F \oplus G = E$ si et seulement si pour tout $x \in E$ il existe un unique élément $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. On note alors $\pi_F : E \to F$, $x \mapsto x_F$.

(c) Vérifier que π_F est une projection. Déterminer son noyau et son image.

6. Soit $F_1, \cdots F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On considère l'application $\varphi : F_1 \times \cdots \times F_p \to E$ définie par par $\varphi(x_1, \cdots, x_p) = x_1 + \cdots + x_p$.

   (a) Montrer que les $\{F_i\}$ sont en somme directe si et seulement si φ est injective.

   (b) Montrer que les $\{F_i\}$ sont supplémentaires si et seulement si φ est un isomorphisme.

7. Soit E un espace vectoriel et f une application linéaire définie sur E. Montrez que l'image de f est isomorphe à tout sous-espace supplémentaire de $\ker f$.

8. Soit E un espace vectoriel. Pour tout $f \in E^\star$ et tout $a \in E$, on définit l'endomorphisme $\Theta_{a,f} \in \mathcal{L}(E)$ par : $\forall\, x \in E, \quad \Theta_{a,f}(x) = f(x)\, a$.

   (a) Pour $T \in \mathcal{L}(E)$, calculer $T \circ \Theta_{a,f}$.

   (b) Si $f(a) = 1$, montrer que $\Theta_{a,f}$ est un projecteur de rang 1 dont on précisera l'image et le noyau.

   (c) Réciproquement, montrer que pour tout projecteur P de rang 1, il existe $f \in E^\star$ et $a \in E$ tels que $f(a) = 1$ et $\Theta_{a,f} = P$.

9. Sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré ≤ 2, on considère les trois formes linéaires :
   $\varphi_1(P) = P(1)\,,\ \varphi_2(P) = P'(1)\,,\ \varphi_3(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt.$
   Montrer que $\{\varphi_1\,,\ \varphi_2\,,\ \varphi_3\}$ est une base du dual $E^\star$.
   Déterminer la base $\mathcal{B}$ dont elle est la base duale.

10. Que peut–on dire de deux formes linéaires sur un même espace vectoriel qui possèdent le même noyau ?

11. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif (vous pouvez supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

    (a) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on définit l'application $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ par $\varphi_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$. Montrer que φ_A est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

    (b) Montrer que $\varphi : A \mapsto \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.

    (c) Soit $\Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tous $(A\,,\ B)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\Psi(A\,B) = \Psi(B\,A)$.
    Montrer que Ψ est proportionnelle à la forme trace : $\quad \exists\, \lambda \in \mathbb{K}\,, \quad \Psi = \lambda\,\mathrm{Tr}$.

2 Le jeudi 29 septembre

2.1 Définitions

Rappeler les définitions suivantes: *hyperplan, vecteur propre, valeur propre, endomorphisme diagonalisable, polynôme caractéristique, polynôme annulateur.*

2.2 Problèmes

12. Soient f et g des formes linéaires sur un espace vectoriel E. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $f(x)\,g(x) = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

13. Soient H et H' des hyperplans d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E.
    (a) Soient F et G des sous–espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous–espace vectoriel de E si et seulement si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.
    (b) En déduire que $H \cup H' \neq E$.
    (c) En déduire une nouvelle démonstration pour l'exercice précédent.
    (d) Déduire de (b) qu'il existe une droite D supplémentaire commun à H et H'.
    (e) Soit p la projection sur H' parallèlement à D. Montrer que l'application F qui à $h \in H$ associe $p(h) \in H'$, est un isomorphisme des espaces vectoriels H et H'.
    (f) En déduire que si x et x' sont des vecteurs non nuls de E, il existe $A \in \mathbf{GL}(E)$ tel que $A(x) = x'$.
    (g) Si E est de dimension finie, donner une démonstration directe du résultat précédent.

14. Soient E un K–espace vectoriel, F et G des sous–espaces vectoriels de E. Pour toute partie A de E, posons $A^\circ = \{\varphi \in E^\star \ ; \ A \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)\}$.
    (a) Montrer que A° est un sous–espace vectoriel de $E^\star$ et que $A^\circ = (\mathrm{Vect}(A))^\circ$.
    (b) Montrer que $F = \displaystyle\bigcap_{\varphi \in F^\circ} \mathrm{Ker}(\varphi)$.
    (c) Montrer que $(F+G)^\circ = F^\circ \cap G^\circ$ et $(F \cap G)^\circ = F^\circ + G^\circ$.
    (d) Si E est de dimension finie, montrer que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\circ)$.

15. Soit E un K–espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1\,, \ldots\,, \,e_n\}$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
    (a) On considère l'application ${}^tf$ qui à $\varphi \in E^\star$ associe $\varphi \circ f$.
        i. Montrer que ${}^tf$ est un endomorphisme de $E^\star$.
        ii. Déterminer le noyau et l'image de ${}^tf$ en fonction de ceux de f.
        iii. Soit $\mathcal{B}^\star$ la base duale de $\mathcal{B}$. Montrer que $\mathrm{Mat}_{B^\star}({}^tf) ={}^t(\mathrm{Mat}_B(f))$.
    (b) Soit $\varphi \in E^\star$ une forme linéaire non nulle et H son noyau.
        i. Montrer que si φ est vecteur propre pour ${}^tf$, alors H est stable par f.
        ii. Réciproquement, supposons que H soit stable par f.
            A. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) = 1$.

B. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $h \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que $x = h + \alpha\, a$.

C. En déduire que φ est vecteur propre pour ${}^t f$ associé à la valeur propre $\lambda = \varphi \circ f(a)$.

iii. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que H soit stable par f.

(c) ***Application :*** On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les plans stables par f.

16. Soient $\{\lambda_1\,, \dots\,, \lambda_p\}$ des scalaires 2 à 2 distincts d'un corps commutatif $\mathbb{K}$ (ici encore vous pouvez supposer $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit $P = \displaystyle\prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)$.

(a) Pour $j = 1 \, \dots\,, p$, soit ψ_j la forme linéaire sur $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ définie par $\psi_j : Q \mapsto Q(\lambda_j)$.

i. Montrer que la famille $(\psi_j)_{1 \leq j \leq p}$ est une base du dual de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ et déterminer la base $\{L_1\,, \dots\,, L_p\}$ de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ dont elle est la base duale.
(Les L_j pourront être obtenus comme polynômes d'interpolation de Lagrange, voir p.6 du poly de Géométrie).

ii. Montrer que $(X - \lambda_j)L_j$ admet tous les λ_j pour racines et est multiple de P.

iii. Montrer que le polynôme $1 - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} L_j$ admet tous les λ_j pour $j = 1\,, \dots\,, \lambda_p$ pour racines. En déduire qu'il est nul.

(b) Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P(f) = 0$.

i. Montrer que $(f - \lambda_j\, \mathrm{Id}_E) \circ L_j(f) = 0$.

ii. Pour $x \in E$, posons $x_j = L_j(f)(x)$. Montrer que x_j appartient à $E_{\lambda_j}(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_j\, \mathrm{Id}_E)$ et qu'on a $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j$.

iii. En déduire que f est diagonalisable.

(c) En déduire le résultat suivant :
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si, et seulement si, il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

3 Le vendredi 30 septembre

3.1 Définitions

Rappeler les définitions suivantes: *relation d'équivalence, classes, relation dordre, cardinal, équipotence, dénombrabilité, groupe, abélien, homomorphisme de groupes, isomorphisme de groupes, produit direct de groupes, automorphisme de groupes, sous-groupe, sous-groupe distingué, ordre d'un élément et d'un groupe, opération interne compatible avec une relation déquivalence.*

3.2 Problèmes

Si vous avez déjà fait certains problèmes vendredi passé et avez obtenu B ou TB, ne les refaites pas.

1. Soit $(G, \star)$ un groupe et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur G. On suppose que $\star$ est compatible avec $\mathcal{R}$.
   (a) Expliquer pourquoi l'opération interne $\tilde{\star}$ sur $G/\mathcal{R}$ donnée par $\overline{x}\tilde{\star}\overline{y} = \overline{x \star y}$ est bien définie.
   (b) Montrer que $((G/\mathcal{R}), \tilde{\star})$ est un groupe et qu'il est abélien si $(G, \star)$ l'est.
2. Soit G un groupe, x et y deux éléments de G qui commutent (i.e. $xy = yx$). Montrer que x commute avec toutes les puissances y^k, $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que si x commute avec z^k et z^ℓ où $z \in G$ et k, ℓ deux entiers premiers entre eux, alors x commute avec z.
3. Si G est un groupe et $(x\,,\,y) \in G \times G$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $(xyx^{-1})^n = xy^nx^{-1}$.
4. Soit $G = \{x_1\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ un groupe fini abélien, montrer que $(x_1\,\cdots\,x_n)^2 = e$.
5. Montrer que tout groupe non–abélien est d'ordre au moins 6 (vous pouvez utiliser l'exercice 1 de la feuille *"Stucture de groupe"*).
6. $(G\,,\,\star)$ est–il un groupe dans les cas suivants ?
   $G = \mathbb{R}$ et $x \star y = \sqrt{x^2 + y^2}$; $G = \mathbb{R}$ et $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$; $G = \mathbb{R}$ et $x \star y = x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2}$; $G =]-1\,,\,1[$ et $x \star y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$.
7. Soient H et K deux parties d'un groupe G. Notons $HK = \{g \in G \mid g = hk\,,\, h \in H \text{ et } k \in K\}$ et $H^{-1} = \{h^{-1} \mid h \in H\}$.
   (a) Montrer que $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$.
   (b) Montrer que $\emptyset \subsetneq U \subseteq G$ est un sous–groupe de G si, et seulement si, $UU \subseteq U$ et $U^{-1} \subseteq U$.
   (c) Montrer que le produit de deux sous–groupes de G est encore un sous–groupe de G si, et seulement si, H et K sont permutables, i.e. $HK = KH$.
8. Montrer que les trois groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont deux à deux non isomorphes.
9. (a) Donner l'ordre de chacun des éléments de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.
   (b) Soit $(G, .)$ un groupe cyclique d'ordre 6. On note g un générateur.
      i. Quels sont les éléments de G ?
      ii. Quels sont les ordres respectifs de chacun de ces éléments ?

(c) Soit $(G, .)$ un groupe cyclique d'ordre n. On note g un générateur.

   i. Quels sont les éléments de G ?

   ii. Soit $k \in \{1, \cdots, n-1\}$. On pose $d = \text{pgcd}(n, k)$. Montrer que l'ordre de g^k est $\frac{n}{d}$.

10. Soit G un groupe. Pour $g \in G$, notons par $o(g)$ l'ordre de g.

(a) Montrer que pour tout $(g\,,\,h) \in G \times G$:

   i. $o(g^{-1}) = o(g)$.

   ii. $o(gh) = o(hg)$.

   iii. $o(g) = o(hgh^{-1})$.

(b) Donner un exemple d'un groupe avec deux éléments g et h d'ordre fini tels que le produit gh soit d'ordre infini.

(c) Donner un exemple d'un groupe avec deux éléments g et h d'ordre infini tels que le produit gh soit d'ordre fini > 1.

(d) Pour tout $\varphi \in \text{Aut}(G)$, $o(\varphi(g)) = o(g)$.

(e) Montrer que si $g \in G$ est d'ordre fini, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $o(g^m) = \dfrac{o(g)}{\text{pgcd}(o(g)\,,\,m))}$.

(f) Soient g et h deux éléments de G d'ordre fini tels que $gh = hg$.

   i. Montrer que $o(gh) \,|\, \text{ppcm}(o(g)\,,\,o(h)))$.

   ii. Montrer que si $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$, alors $o(gh) = \text{ppcm}(o(g)\,,\,o(h)))$.

   iii. Montrer que si $o(g)$ et $o(h)$ sont premiers entre eux, alors $o(gh) = o(g)o(h)$.