

Feuille d'exercices 6

- ♣ 1. Dans un plan affine euclidien  $\mathcal{P}$ , on considère pour  $i = 1, 2$ , la rotation  $R_i$  de centre  $A_i$  et d'angle  $\theta_i \notin 2\pi\mathbb{Z}$ . Montrer que  $R_1$  et  $R_2$  commutent si et seulement si  $A_1 = A_2$ .
2. Soient  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  des droites distinctes d'un plan affine euclidien. On désigne par  $s_i$  la réflexion par rapport à  $\mathcal{D}_i$ , pour  $i = 1 \dots 3$ . Etudier la composée  $s_2 \circ s_3$  selon la position relative des droites  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$ . En déduire que  $s_1 \circ s_2 \circ s_3$  est involutive si et seulement si les trois droites sont concourantes ou parallèles.
3. Déterminer les isométries  $f$  du plan affine euclidien  $\mathcal{E}_2$  (resp. de l'espace euclidien  $\mathcal{E}_3$ ) telles que  $f^3$  soit une translation  $t_{\vec{a}}$ . (On montrera que  $f$  est nécessairement un déplacement et on utilisera sa décomposition canonique).
4. **Extrait de l'examen de Décembre 2000.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien de dimension 3 et d'espace directeur  $E$ .
- (a) On considère  $\mathcal{D}$  une droite affine orientée de direction  $D$  et  $R$  une rotation d'axe  $\mathcal{D}$ . Soit  $\Delta$  une droite affine passant par un point  $A$  de  $\mathcal{D}$  et orthogonale à  $\mathcal{D}$ . On désigne par  $S_1$  le demi-tour d'axe  $\Delta$ . On pose  $S_2 = R \circ S_1$ .
- (i) Montrer que  $S_2$  admet au moins un point fixe.
- (ii) Montrer que  $D$  est inclus dans  $\text{Ker}(S_2^\# + \text{Id}_E)$ .
- (iii) En déduire que  $S_2$  est un demi-tour.
- (iv) Montrer que  $R$  est la composée de deux demi-tours.
- (b) On considère  $\vec{u}$  un vecteur non nul de  $E$  et  $\tau$  la translation de vecteur  $\vec{u}$ . Soient  $A \in \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}$  une droite affine passant par  $A$  et dont la direction est orthogonale à  $\vec{u}$ , et  $S$  le demi-tour d'axe  $\mathcal{D}$ .
- (i) Montrer que le point  $B = A + \frac{\vec{u}}{2}$  est fixe par  $\tau \circ S$ .
- (ii) En déduire que  $\tau \circ S$  est un demi-tour.
- (iii) Montrer que  $\tau$  est la composée de deux demi-tours.
- (c) Montrer que le groupe des déplacements de  $\mathcal{E}$  est engendré par les demi-tours.
5. **Extrait de l'examen de Décembre 2001.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine réel de dimension 3 et d'espace directeur  $E$ . Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites affines non parallèles de  $\mathcal{E}$ . Pour  $i = 1, 2$ , on suppose que  $\mathcal{D}_i$  est la droite passant par le point  $A_i$  et de direction  $\mathbb{R} \cdot \vec{u}_i$ .
- (a) Soit  $\vec{u}_3$  un vecteur de  $E$  tel que  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  soit une base de  $E$ .
- (i) Soit  $\mathcal{P}$  le plan affine passant par  $A_1$  et de direction  $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$ . Montrer que l'intersection de  $\mathcal{P}$  et de  $\mathcal{D}_2$  est réduite à un point, noté  $H_2$ .
- (ii) Soit  $\Delta$  la droite passant par  $H_2$  et dirigée par  $\vec{u}_3$ . Montrer que l'intersection de  $\Delta$  et de  $\mathcal{D}_1$  est réduite à un point, noté  $H_1$ .
- (iii) Soit  $\Delta'$  une droite parallèle à  $\Delta$ , coupant  $\mathcal{D}_i$  en  $K_i$ , pour  $i = 1, 2$ . Montrer que  $\Delta = \Delta'$  (On décomposera  $\overrightarrow{K_1 K_2}$  en fonction de  $\overrightarrow{H_1 H_2}$ ,  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ ).
- (iv) Conclure qu'il existe une unique droite dirigée par  $\vec{u}_3$  et rencontrant  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .
- (b) On suppose de plus que  $\mathcal{E}$  est euclidien. Montrer qu'il existe une unique droite affine  $\Delta$ , orthogonale et sécante, à  $\mathcal{D}_1$  et à  $\mathcal{D}_2$ .  
On dit que  $\Delta$  est la *perpendiculaire commune* à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

- (c) Dans toute la suite  $\mathcal{E}$  est un espace affine euclidien orienté de dimension 3.
- (i) Soient  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  deux droites affines orthogonales et sécantes en  $H$ . On suppose que  $\mathcal{D}$  est orientée par le choix d'un vecteur unitaire  $\vec{u}$  engendrant sa direction. Soit  $S_\Delta$  le demi-tour d'axe  $\Delta$ .
- A) Pour tout  $\varphi \in \mathbb{R}$ , on note  $R(\mathcal{D}, \varphi)$  la rotation d'axe  $\mathcal{D}$  et d'angle  $\varphi$ .  
Montrer que  $S_\Delta \circ R(\mathcal{D}, \varphi) = R(\mathcal{D}, -\varphi) \circ S_\Delta$ . (On pourra rapporter  $\mathcal{E}$  à un repère orthonormal bien choisi d'origine  $H$ ).
- B) Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $S' = S_\Delta \circ R(\mathcal{D}, \theta)$  est une involution.
- C) Soit  $\Delta' = R(\mathcal{D}, -\frac{\theta}{2})(\Delta)$ . Montrer que tout point de  $\Delta'$  est fixe par  $S'$ .
- D) En déduire que  $S'$  est le demi-tour  $S_{\Delta'}$  d'axe  $\Delta'$ .
- E) Montrer que  $R(\mathcal{D}, \theta) \circ S_\Delta$  est également un demi-tour.
- (ii) Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites affines non coplanaires de  $\mathcal{E}$  et  $\Delta$  leur perpendiculaire commune. Pour  $i = 1, 2$ , on considère  $R_i$ , rotation d'axe  $\mathcal{D}_i$  orienté par un vecteur  $\vec{u}_i$  et d'angle  $\theta_i \notin 2\pi\mathbb{Z}$ .
- A) Soit  $T = R_2 \circ R_1$ . Montrer que  $T$  n'est pas une translation.
- B) Déduire du (a) qu'il existe des droites  $\Delta'$  et  $\Delta''$  telles que  $R_1 = S_\Delta \circ S_{\Delta'}$  et  $R_2 = S_{\Delta''} \circ S_\Delta$ .
- C) Montrer que  $T = S_{\Delta''} \circ S_{\Delta'}$ .
- D) Supposons que  $T$  admette un point fixe  $O$ . Montrer que  $S_{\Delta''}(O) = S_{\Delta'}(O)$ . En déduire que  $I$  milieu de  $[O, S_{\Delta'}(O)]$  appartient à  $\Delta'$  et  $\Delta''$ . Aboutir à une contradiction.
- E) Quelle est la nature géométrique de  $T$  ?

6. **Extrait de l'examen de Juin 2003.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien de dimension 3 dirigé par  $E$ . On désigne  $\mathcal{T}(\mathcal{E})$  le groupe des translations de  $\mathcal{E}$ , par  $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$  le groupe des isométries de  $\mathcal{E}$  et par  $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$  le groupe des déplacements de  $\mathcal{E}$ .

On considère un plan affine  $\mathcal{P}$  de direction  $P$  et on se propose d'étudier

$$G = \{ f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E}) ; f(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \}.$$

Soit  $S$  la réflexion relativement à  $\mathcal{P}$ . On pose  $G^+ = G \cap \mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$  et  $H = \{ \text{Id}_{\mathcal{E}}, S \}$ .

- (a) (i) Montrer que  $G$  est un sous-groupe de  $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ .
- (ii) Donner un exemple de  $f \in G$  distinct de  $\text{Id}_{\mathcal{E}}$  tel que  $f \in G^+$  (resp.  $f \notin G^+$ ).
- (iii) Montrer que tout élément  $f$  de  $G$  se décompose de manière unique sous la forme  $f = g \circ h$  avec  $g \in G^+$  et  $h \in H$ .
- (iv) Montrer que  $G$  est isomorphe à un produit semi-direct de  $G^+$  par  $H$ .
- (b) On pose  $T = G \cap \mathcal{T}(\mathcal{E})$ .
- (i) Soit  $\vec{v} \in E$ . Montrer que  $t_{\vec{v}}$ , translation de vecteur  $\vec{v}$ , appartient à  $G$  si et seulement si  $\vec{v} \in P$ .
- (ii) En déduire que  $T$  est un sous-groupe distingué de  $G^+$  isomorphe à  $(P, +)$ .
- (c) Soit  $O$  un point de  $\mathcal{P}$ . On pose  $K = \{ g \in G^+ ; g(O) = O \}$ .
- (i) Montrer que  $K$  est un sous-groupe de  $G^+$ .
- (ii) Donner un exemple de  $g \in G^+$  distinct de  $\text{Id}_{\mathcal{E}}$  tel que  $g \in K$  (resp.  $g \notin K$ ).
- (iii) Soit  $g \in G^+$ . Montrer que  $t_{\frac{g(O)O}{g(O)O}} \circ g$  appartient à  $K$ .
- (iv) En déduire que  $G^+$  est isomorphe à un produit semi-direct de  $T$  par  $K$ .
- (d) On pose  $D = P^\perp$ , on désigne par  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $O$  et de direction  $D$ , et par  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $D$ . Soit  $L = \{ k \in K ; k^\#(\vec{u}) = \vec{u} \}$ .
- (i) Soit  $k \in K$ . Montrer que  $k^\#(D) = D$ . En déduire que  $k^\#(\vec{u}) = \pm \vec{u}$ .

- (ii) Donner un exemple de  $k \in K$ , distinct de  $\text{Id}_{\mathcal{E}}$ , tel que  $k \in L$  (resp.  $k \notin L$ ).
  - (iii) Déterminer les éléments de  $L$ .
  - (iv) Montrer que  $L$  est un sous-groupe distingué de  $K$ .
  - (v) Montrer que  $K$  est isomorphe à un produit semi-direct de  $L$  par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
- (e) Conclure que  $G$  est isomorphe à  $\left( \mathbb{R}^2 \times_{\alpha} (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times_{\beta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \right) \times_{\gamma} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

♣ 7. Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal. Déterminer la nature géométrique des applications suivantes définies analytiquement.

$$f_1 : \begin{cases} x' = -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{3}{7}z + 3 \\ y' = \frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z - 2 \\ z' = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z + 1 \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1 \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 1 \\ z' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 1 \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} x' = \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y - \frac{4}{9}z + 2 \\ y' = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{7}{9}z + 3 \\ z' = \frac{1}{9}x + \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z + 3 \end{cases} \quad f_4 : \begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -z \\ z' = -x + 2 \end{cases} \quad f_5 : \begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -z + 1 \\ z' = x + 3 \end{cases}$$

### 8. Extrait de l'examen de Décembre 2002.

- (a) Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine réel d'espace directeur  $E$ . Soient  $g$  et  $h$  appartenant à  $\text{Aut}(\mathcal{E})$ .
- (i) Soit  $A$  un point  $\mathcal{E}$ . Montrer que  $h(A)$  est fixe par  $h \circ g \circ h^{-1}$  si et seulement si  $A$  est fixe par  $g$ .
  - (ii) Montrer que  $h \circ g \circ h^{-1}$  est une symétrie affine si et seulement si  $g$  est une symétrie affine.
  - (iii) On suppose maintenant que  $g$  est la symétrie affine par rapport à un sous-espace affine  $\mathcal{F}$  et parallèlement à  $G$ , sous-espace vectoriel supplémentaire dans  $E$  de la direction  $F$  de  $\mathcal{F}$ .
    - A) Montrer que  $h \circ g \circ h^{-1}$  est la symétrie affine par rapport au sous-espace affine  $h(\mathcal{F})$  et parallèlement à  $h^{\#}(G)$ .
    - B) Montrer que  $h$  commute avec  $g$  si et seulement si  $h(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$  et  $h^{\#}(G) = G$ .
  - (iv) On suppose de plus que  $\mathcal{E}$  est euclidien et  $g$  est une symétrie orthogonale. Montrer que  $h$ , isométrie de  $\mathcal{E}$ , commute avec  $g$  si et seulement si  $h(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ .
- (b) Dans cette question  $\mathcal{E}$  est un espace affine euclidien et  $f$  une isométrie de  $\mathcal{E}$ .  
On pose  $\mathcal{C} = \{h \in \mathcal{I}(\mathcal{E}) ; h \circ f = f \circ h\}$ ,  $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C} \cap \mathcal{I}^+(\mathcal{E})$  et  $\mathcal{C}^- = \mathcal{C} \cap \mathcal{I}^-(\mathcal{E})$ .
- (i) Montrer que  $\mathcal{C}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{I}(\mathcal{E})$  et que  $\mathcal{C}^+$  est un sous-groupe distingué de  $\mathcal{C}$ .
  - (ii) Soit  $f = t_{\vec{u}} \circ g$  la décomposition canonique de l'isométrie  $f$  et soit  $h \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$ .
    - A) Montrer que  $g$  appartient à  $\mathcal{C}$ .
    - B) Montrer que  $t_{h^{\#}(\vec{u})} \circ (h \circ g \circ h^{-1})$  est la décomposition canonique de  $h \circ f \circ h^{-1}$ .
    - C) En déduire que  $h$  appartient à  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $h^{\#}(\vec{u}) = \vec{u}$  et  $h$  commute avec  $g$ .
- (c) On conserve les hypothèses et les notations de la question précédente mais on suppose de plus que  $\mathcal{E}$  est orienté, de dimension 3 et que  $f$  est la symétrie plane glissée, par rapport au plan  $\mathcal{F}$  (de direction  $F$ ) et de vecteur  $\vec{u}$  non nul.

- (i) A) Quelle est la nature géométrique de  $g$ .
- B) En déduire que  $\mathcal{C}$  est isomorphe à un produit semi-direct de  $\mathcal{C}^+$  par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
- (ii) Montrer que tout  $g' \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$  admettant un unique point fixe, n'appartient pas à  $\mathcal{C}$ . (On pourra utiliser 1(a)).
- (iii) Soit  $h = t_{\vec{v}} \circ k$  la décomposition canonique d'un élément de  $\mathcal{C}^-$ .
  - A) Déduire de (b) que  $k$  est une réflexion par rapport à un plan  $\mathcal{P}$  et  $\vec{u} \in P$  direction de  $\mathcal{P}$ .
  - B) Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires montrer que  $P = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = F$ , puis que  $\mathcal{P} = \mathcal{F}$ .
  - C) Si  $P \neq F$ , montrer que  $\vec{v}$  est colinéaire à  $\vec{u}$ , que  $P = \text{Vect}(\vec{u}, F^\perp)$  et que  $\mathcal{P} \cap \mathcal{F} = \mathcal{D}$  droite affine dirigée par  $\vec{u}$ .
- (iv) En déduire les éléments de  $\mathcal{C}^-$ , puis de  $\mathcal{C}$ .