

UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

Licence de Maths – 5MT04

Année 2004-2005

Partiel

Durée 2 heures

Exercice I

Soit $K = \left\{ R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} ; \vartheta \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que K est un groupe abélien pour la multiplication matricielle.
2. Montrer que K est isomorphe au groupe $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ des nombres complexes de module 1.
3. Donner un exemple d'un élément de K d'ordre 3 et d'un élément de K d'ordre infini.
(On rappelle pour le dernier point que le nombre π n'est pas rationnel)
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un sous-groupe K_n de K d'ordre n .
5. Montrer que l'application

$$(R_\vartheta, (x, y)) \longmapsto R_\vartheta \cdot (x, y) = (x \cos(\vartheta) - y \sin(\vartheta), x \sin(\vartheta) + y \cos(\vartheta))$$

définit une action du groupe K dans \mathbb{R}^2 .

Déterminer les orbites de cette action.

Déterminer le stabilisateur $K_{(x, y)}$ de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice II

Montrer que $12\mathbb{Z}$ est un sous-groupe distingué de $3\mathbb{Z}$ et que le groupe-quotient $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice III

Soit H un sous-groupe de G , on appelle **le cœur** de H dans G , la partie H_G de G définie par $H_G = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$.

Montrer que H_G est un sous-groupe distingué de G et que $H_G \subseteq H$.

Montrer que H_G est le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans H , i.e. si $K \triangleleft G$ et $K \subseteq H$, alors $K \subseteq H_G$.

Si $G = S_3$ est le groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$ et $H = \{\text{id}, (13)\}$ où on a désigné par (13) la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer H_{S_3} .

Exercice IV

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique de E . On dit que φ est **positif** si pour tout $x \in E$,

$$\langle \varphi(x), x \rangle \geq 0$$

Nous noterons dans tout ce qui suit par $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs.

1. (a) Montrer qu'un endomorphisme symétrique φ est positif si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives.
En déduire que le déterminant $\det(\varphi)$ d'un endomorphisme symétrique positif φ est positif.
- (b) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^3$ qu'on munit de sa structure euclidienne canonique et on désigne par $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ dans la base canonique \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que φ est positif.

2. On revient au cas général et on suppose que $u \in \mathcal{S}^+(E)$.
On dit qu'un $v \in \mathcal{S}^+(E)$ est une **racine carrée** de u si on a $v^2 = u$.
 - (a) Si u possède une racine carrée v , montrer que si λ est une valeur propre de v , alors λ^2 est valeur propre de u et $\text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_E) \subseteq \text{Ker}(u - \lambda^2 \text{Id}_E)$.
En déduire que u et v sont diagonalisables dans une même base orthonormée et que $\text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}(u - \lambda^2 \text{Id}_E)$.
 - (b) Montrer tout endomorphisme $u \in \mathcal{S}^+(E)$ possède une unique racine carrée que nous noterons \sqrt{u} .
 - (c) Déterminer la racine carrée $\sqrt{\varphi}$ de l'endomorphisme φ de la question 1.(b) ci-dessus.