

# L3 Algèbre-Géométrie

## Partiel (2 heures), 2 novembre 2011

Aucun document n'est autorisé. Pas ou peu de points ne seront donnés pour des solutions illisibles.

### 1 Définitions (4 points)

Rappeler les définitions suivantes:

1. espace vectoriel
2. forme linéaire
3. classe d'équivalence
4. ordre d'un élément et d'un groupe

### 2 Exercice (3 points)

Démontrez que deux formes linéaires  $\alpha$  et  $\beta$  sur un même espace vectoriel possèdent le même noyau si, et seulement si il existe un scalaire  $\lambda$  non nul tel que  $\alpha = \lambda\beta$ .

### 3 Exercice (2 points)

Soit  $G = \{x_1, \dots, x_n\}$  un groupe fini abélien, montrer que  $(x_1 \cdots x_n)^2 = e$ .

### 4 Problème (6 points)

Soit  $G$  un groupe. Pour  $g \in G$ , notons par  $o(g)$  l'ordre de  $g$ .

1. Montrer que pour tout  $(g, h) \in G \times G$  :

(a)  $o(g^{-1}) = o(g)$ .

(b)  $o(gh) = o(hg)$ .

(c)  $o(g) = o(hgh^{-1})$ .

2. Donner un exemple d'un groupe avec deux éléments  $g$  et  $h$  d'ordre fini tels que le produit  $gh$  soit d'ordre infini.
3. Donner un exemple d'un groupe avec deux éléments  $g$  et  $h$  d'ordre infini tels que le produit  $gh$  soit d'ordre fini  $> 1$ .
4. Pour tout  $\varphi \in \text{Aut}(G)$ ,  $o(\varphi(g)) = o(g)$ .

5. Montrer que si  $g \in G$  est d'ordre fini, alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $o(g^n) = \frac{o(g)}{\text{pgcd}(o(g), |n|)}$ .

6. Soient  $g$  et  $h$  deux éléments de  $G$  d'ordre fini tels que  $gh = hg$ .

(a) Montrer que  $o(gh) \mid \text{ppcm}(o(g), o(h))$ .

(b) Montrer que si  $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$ , alors  $o(gh) = \text{ppcm}(o(g), o(h))$ .

(c) Montrer que si  $o(g)$  et  $o(h)$  sont premiers entre eux, alors  $o(gh) = o(g)o(h)$ .

## 5 Problème (5 points)

Soient  $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$  un espace euclidien et  $\varphi \in L(E)$  un endomorphisme symétrique (auto-adjoint) de  $E$ . On dit que  $\varphi$  est **positif** si pour tout  $x \in E$ , on a

$$\langle \varphi(x), x \rangle \geq 0$$

Nous noterons dans tout ce qui suit par  $S^+(E)$  l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs.

1. Montrer qu'un endomorphisme symétrique  $\varphi$  est positif si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives.
2. En déduire que le déterminant  $\det(\varphi)$  d'un endomorphisme symétrique positif  $\varphi$  est positif.
3. On suppose dans cette partie que  $E = \mathbb{R}^3$  qu'on munit de sa structure euclidienne canonique et on désigne par  $\varphi \in L(\mathbb{R}^3)$  l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est donnée par

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $\varphi$  est positif.