

# UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

Licence – 5MT04

Année 2005-2006

## Projet de Partiel

### Exercice I

Soit  $G$  un groupe *fini*; montrer qu'il existe un unique homomorphisme  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}$ .  
Montrer que ce résultat est faux si  $G$  n'est pas fini en fournissant un exemple.

### Exercice II

Soit  $G$  un groupe opérant sur un ensemble  $X$ . On suppose que  $\#(G) = 143 = 11 \times 13$  et  $\#(X) = 108$ .  
Montrer, par l'absurde, qu'il existe au moins un  $x_0 \in X$  tel que  $\forall g \in G, g.x_0 = x_0$ .

### Exercice III

Pour un groupe  $G$  et une partie  $A \subseteq G$ , on désigne par  $\langle A \rangle$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $A$ .  
On suppose que  $G = \langle a \rangle$  est un groupe *cyclique* engendré par un élément  $a \in G$  et on note  $n = \#(G)$  son ordre.

1. Montrer que pour tout entier  $\ell \in \mathbb{Z}$ , l'application  $f_\ell : g \mapsto g^\ell$  est un endomorphisme du groupe  $G$ .
2. Pour tout  $\ell \in \mathbb{Z}$ , notons par  $d = n \wedge \ell$  le p.g.c.d. de  $n$  et  $\ell$ . Montrer que

$$\text{Im}(f_\ell) = \langle a^d \rangle \quad \text{et} \quad \text{Ker}(f_\ell) = \langle a^{\frac{n}{d}} \rangle$$

3. Montrer que l'application  $f : \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \text{End}(G)$  définie pour tout entier  $\ell$  dans  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  par  $f(\ell) = f_\ell$  est une bijection. En déduire  $\#(\text{End}(G))$ .
4. Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur  $n$  et  $\ell$ ) pour que  $f_\ell$  soit un automorphisme du groupe  $G$ .
5. Montrer que le groupe  $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{11})$  des éléments (multiplicativement) inversibles dans  $\mathbb{Z}_{11}$  est un groupe cyclique engendré par  $\bar{2}$ .  
Expliciter le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{11}))$  de tous les automorphismes de  $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{11})$ .  
Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{11}))$  est-il cyclique?

### Exercice IV

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire.

Soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs distincts de  $E$  tels que  $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ .

1. Montrer que  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  et  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  sont orthogonaux.
2. Soient  $\mathcal{H}$  l'hyperplan orthogonal à  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  et  $\sigma_{\mathcal{H}}$  la symétrie orthogonale par rapport à  $\mathcal{H}$ .  
Démontrer que  $\sigma_{\mathcal{H}}$  échange  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  (i.e.  $\sigma_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$  et  $\sigma_{\mathcal{H}}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ ).  
Réciproquement, si  $\sigma$  est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan (ou réflexion) qui échange  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , montrer que  $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}$ .
3. Montrer que  $\mathcal{H} = \{\mathbf{w} \in E ; \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|\}$ .

### Exercice V

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq 3$  que l'on munit du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$$

On considère l'application  $\sigma : E \rightarrow E$  définie pour tout  $P \in E$  par  $\sigma(P)(X) = P(-X)$ .

Montrer que  $\sigma$  est une symétrie orthogonale dont on donnera les éléments caractéristiques.

### Exercice VI

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée d'ordre  $n$  et à coefficients réels et soit  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  les vecteurs colonnes de  $A$ .

Notre objectif est de démontrer l'inégalité suivante :

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \|\mathbf{a}_j\| = \prod_{j=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^n a_{kj}^2}$$

(appelée inégalité de HADAMARD) où  $\|\mathbf{u}\|$  est la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ .

1. Nous supposons, tout d'abord, que  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  (i.e.  $A$  est inversible).  
Soit  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  une base orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  obtenue en appliquant le procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT au système (libre) de vecteurs  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ .  
Soit  $B = (\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n)$  la matrice dont les colonnes sont constituées par les composantes des vecteurs  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  et soit  $D$  la matrice  ${}^t B \cdot B$ .
  - (a) Montrer que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $\|\mathbf{b}_k\| \leq \|\mathbf{a}_k\|$ .
  - (b) Montrer que  $\det(A) = \det(B)$ .
  - (c) Montrer que  $D$  est une matrice diagonale dont on explicitera les éléments de sa diagonale.
  - (d) Dédire de ce qui précède que  $|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \|\mathbf{a}_j\|$ .
2. Étendre l'inégalité précédente pour toutes les matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .