

### L3: Algèbre et Géométrie

Apprendre des maths c'est un peu comme apprendre une langue étrangère... il est utile de connaître une liste de mots, c'est-à-dire d'être capable de reproduire la définition d'un mot sans avoir à y réfléchir, et d'avoir une liste de quelques exemples illustrant chaque mot.

**Définitions à connaître:** corps commutatif, espace vectoriel, linéaire, forme linéaire, dual d'un espace vectoriel, hyperplan, base, base orthonormée, dimension d'un espace vectoriel, produit hermitien et scalaire, espace hermitien et euclidien, préhilbertien complexe ou réel, endomorphisme, adjoint d'un endomorphisme, endomorphisme unitaire, normal, autoadjoint, symétrique, orthogonal, groupe orthogonal, relation d'équivalence, classes, ensemble inductif, relation d'ordre, cardinal, équipotence, dénombrabilité, groupe, abélien, homomorphisme de groupes, isomorphisme de groupes, produit direct et semi-direct de groupes, automorphisme de groupes, sous-groupes, sous-groupe distingué, sous-groupe engendré par une partie, ordre d'un élément et d'un groupe, action d'un groupe sur un ensemble,  $p$ -groupes, groupes quotients, groupe de symétrie, cycle, transposition, signature, groupes cycliques, indicateur d'Euler, sous-groupes de Sylow, suites des diviseurs élémentaires, composantes primaires, espace affine, sous-espace affine, application affine, automorphisme affine, plans et hyperplans affines, sous-espace affine engendré par une partie, projection affine, barycentre, points pondéré, symétrie affine, partie convexe, isométrie affine, réflexion affine, décomposition canonique d'une isométrie affine.

De même que lorsqu'on apprend une nouvelle langue on apprend des règles de grammaire, il y a aussi une liste de résultats à connaître, c'est-à-dire de reconnaître immédiatement les conséquences d'un ensemble d'hypothèses et d'être capable de donner une idée de la preuve.

**Résultats à retenir:** Isomorphisme avec le dual, Inégalité de Cauchy-Schwarz, de Minkowski, orthogonalisation de Schmidt et conséquences, représentation de Riesz, propriétés et caractérisations d'un endomorphisme unitaire, normal, orthogonal, symétrique, autoadjoint, structure de  $O_n(\mathbf{R})$  (comme produit semi-direct et engendré par des réflexions), caractérisations équivalents d'applications affines, structure du groupe des automorphismes d'un espace affine, structure de son groupe des isométries, propriétés du

barycentre (associativité et relation avec les applications affines), relation entre convexité et barycentres.

Théorème de factorisation d'une relation d'équivalence, compatibilité avec une opération interne, axiome du choix et axiome de Zorn, théorème de Cantor-Bernstein, théorème de Cantor, résultats de dénombrabilité, caractérisation de sous-groupes, d'homomorphismes et d'actions, théorème de transfert de structure, théorème de symétrisation, équations aux classes, caractérisation de sous-groupe distingué, caractérisation des produits semidirects, théorème d'isomorphisme d'Emmy Noether, théorème de factorisation pour les homomorphismes de groupes, décomposition d'une permutation, théorème chinois, structure des groupes cycliques, théorème d'Euler, théorème de Fermat, théorèmes de Sylow, décomposition cyclique canonique d'un groupe abélien fini, décomposition en composantes primaires d'un groupe abélien fini.