L3 Algèbre et Géométrie,
examen (4 heures), mardi 15 janvier 2008

Exercice 1:

Soient X et Y deux ensembles où X est supposé fini et soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que

$$\mathrm{Card}(X) = \sum_{y \in Y} \mathrm{Card}(f^{-1}(Y)).$$

Exercice 2:

Soit G un groupe tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.

1. Donner au moins deux exemples distincts de groupes non réduit à l'identité et vérifiant une telle propriété.
2. Montrer que G est nécessairement abélien. (*Indication:* on pourra montrer que pour tout $x \in G$, $x = x^{-1}$.)

Exercice 3:

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E. Rappeler la définition de la notion d'automorphisme affine de l'espace $\mathcal{E}$. Nous noterons $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ l'ensemble des automorphismes affines de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ l'ensemble des translations. Montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ un sous-groupe distingué non-trivial de $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$.

Problème 4:

Soit $n \geq 3$ un entier et $w = e^{2\pi i/n}$. On désigne par $(G, .)$ le groupe des racines n-èmes de l'unité; on a donc $G = \{1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}\}$. Notons par E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n des applications de G dans $\mathbb{C}$. Pour $(\varphi, \psi) \in E \times E$, posons

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\varphi(w^k)} \psi(w^k).$$

On définit pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, les fonctions $f_k : G \to \mathbb{C}$ par $f_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{k}}$ et on considère l'application $U : E \to E$ définie par :

$$(U\varphi)(z) = \varphi(wz)$$

pour tout $z \in G$ et $\varphi \in E$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit hermitien.

2. Montrer que U est un endomorphisme unitaire de E et déterminer son adjoint.

3. Montrer que les f_k sont vecteurs propres de U et calculer les valeurs propres associées. En déduire que $\{f_k\}_{k=0}^{n-1}$ est une base orthogonale de E.

Problème 5:

Soit H un sous-groupe distingué d'un groupe G, et $\pi : G \to G/H$ la projection canonique.

1. Montrer que π induit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de G contenant H et les sous-groupes de G/H.

2. Si K est un sous-groupe de G, montrer que HK est un sous-groupe de G contenant H et $\pi(K) \simeq HK/H$.

3. Déterminer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Problème 6:

Soit G un groupe d'ordre 33. Soient H un 3-sous-groupe de Sylow de G et K un 11-sous-groupe de Sylow de G.

1. Montrer que H et K sont distingués dans G.

2. Montrer que $H \cap K = \{e\}$ et en déduire que si $h \in H$ et $k \in K$, alors $hk = kh$. (*Indication:* considérer l'élément $hkh^{-1}k^{-1}$ de G.)

3. Montrer le groupe G est isomorphe au produit direct de H et de K

4. Montrer que G est cyclique.