

**Examen L3 Algèbre et Géométrie,  
jeudi 3 septembre 2009, 8h-12h**

**Exercice 1 :**

Soit  $G$  un groupe tel que pour tout  $x \in G$ ,  $x^2 = e$ .

1. Donner au moins deux exemples distincts (non isomorphes) de groupes non réduit à l'identité et vérifiant une telle propriété.
2. Montrer que  $G$  est nécessairement abélien. (*Indication:* on pourra montrer que pour tout  $x \in G$ ,  $x = x^{-1}$ .)

**Exercice 2 :**

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\mathcal{E}$  un espace affine d'espace directeur  $E$ . Rappeler la définition de la notion d'automorphisme affine de l'espace  $\mathcal{E}$ . Nous noterons  $\text{Aut}(\mathcal{E})$  l'ensemble des automorphismes affines de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{T}(\mathcal{E})$  l'ensemble des translations. Montrer que  $\mathcal{T}(\mathcal{E})$  un sous-groupe distingué non-trivial de  $\text{Aut}(\mathcal{E})$ .

**Exercice 3 :**

1. Soit  $G$  un groupe fini. Montrer qu'il existe un unique homomorphisme  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Q}$ .
2. Montrer que le résultat obtenu sous 1. est faux si  $G$  n'est pas fini en fournissant un exemple.

**Exercice 4 :**

Soit  $G$  un groupe fini d'ordre 143 et opérant sur un ensemble  $X$  fini de cardinalité 108. Montrer qu'il existe au moins un  $x_0 \in X$  qui vérifie  $g \cdot x_0 = x_0$  pour tout  $g \in G$ .

**Tournez la page!**

**Problème 5 :**

Soit  $n \geq 3$  un entier et  $w = e^{2\pi i/n}$ . On désigne par  $(G, \cdot)$  le groupe des racines  $n$ -èmes de l'unité; on a donc  $G = \{1, w, w^2, \dots, w^{n-1}\}$ . Notons par  $E$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  des applications de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour  $(\varphi, \psi) \in E \times E$ , posons

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\varphi(w^k)} \psi(w^k).$$

On définit pour tout entier  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , les fonctions  $f_k : G \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{n}}$  et on considère l'application  $U : E \rightarrow E$  définie par :

$$(U\varphi)(z) = \varphi(wz)$$

pour tout  $z \in G$  et  $\varphi \in E$ .

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit hermitien et que  $U$  est un endomorphisme unitaire de  $E$ . Déterminer son adjoint.
2. Montrer que les  $f_k$  sont vecteurs propres de  $U$ , calculer les valeurs propres associées et déduire une base orthogonale de  $E$ .

**Problème 6 :**

Soit  $G$  un groupe d'ordre 455.

1. Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers tels que  $p < q$  et  $q - 1$  n'est pas divisible par  $p$ . Montrer que tout groupe d'ordre  $pq$  est cyclique. En déduire que tout groupe d'ordre 35, 65 ou 91 est cyclique.
2. Montrer que dans  $G$ , il existe  $H$  un sous-groupe distingué d'ordre 13,  $K$  sous-groupe distingué d'ordre 7 et  $L$  un sous-groupe d'ordre 5.
3. Montrer que  $KH$  est un sous-groupe distingué cyclique de  $G$  et donner son ordre. (*Indication:* Montrer que pour  $H$  et  $K$  deux sous-groupes distingués d'un groupe  $G$ , alors  $KH$  est un sous-groupe distingué de  $G$ . Pour l'ordre et la structure utiliser la partie 1. de ce problème.)
4. Soit  $N$  le normalisateur de  $L$  dans  $G$ . Montrer que le normalisateur de  $KL$  et celui de  $HL$  coïncident avec  $N$ . En déduire que  $N = G$ . (*Indication:* Un groupe étant toujours contenu dans son normalisateur, on a que  $K, H$  et  $L$  sont inclus dans  $N$ .)
5. Montrer que  $G$  est isomorphe au produit direct de  $KH$  par  $L$  et en déduire que tout groupe d'ordre 455 est cyclique.