

L3 Algèbre et Géométrie,
examen (4 heures), mardi 13 janvier 2009

Exercice 1:

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux ensembles. Montrer que :

1. Il existe $g : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ g = Id_Y \iff f$ est surjective.
2. Il existe $g : Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f = Id_X \iff f$ est injective.

Exercice 2:

Soit G un groupe fini; montrer qu'il existe un unique homomorphisme $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}$. Montrer que ce résultat est faux si G n'est pas fini en fournissant un exemple.

Exercice 3:

Soit E un espace euclidien non-nul et \mathcal{E} un espace affine d'espace directeur E . Rappeler la définition des notions d'automorphisme et d'isométrie affine de l'espace \mathcal{E} . Nous noterons $\text{Aut}(\mathcal{E})$ l'ensemble des automorphismes affines de \mathcal{E} et $\text{Iso}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines. Montrer que $\text{Iso}(\mathcal{E})$ un sous-groupe non-trivial de $\text{Aut}(\mathcal{E})$.

Problème 4:

Soit $E = \mathbb{R}^3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré plus petit ou égal à 3, que l'on munit du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$$

On considère l'application $\sigma : E \rightarrow E$ définie pour tout $P \in E$ par $\sigma(P)(X) = P(-X)$. Montrer que σ est une symétrie orthogonale dont on donnera les valeurs propres et les vecteurs propres.

Tournez la page!

Problème 5:

On rappelle que un endomorphisme T dans un espace hermitien H est dit *normal* si $TT^* = T^*T$. Soit T un endomorphisme normal dans un espace hermitien H .

1. Montrer que $\text{Ker}(T^*) = \text{Ker}(T)$ et $\text{Im}(T^*) = \text{Im}(T)$.
2. Montrer que $\text{Ker}(T)$ et $\text{Im}(T)$ sont supplémentaires orthogonaux dans H .
3. Si S est un endomorphisme normal sur H , montrer que $S \circ T = 0 \iff T \circ S = 0$.

Problème 6:

On rappelle qu'un groupe G est dit *simple* si ses seuls sous-groupes distingués sont le sous-groupe trivial et G lui-même.

1. Énoncer les théorèmes de Sylow.
2. Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre 350.
3. Soient p et q deux nombres premiers tels que $p < q$ et $q - 1$ n'est pas divisible par p . Montrer que tout groupe d'ordre pq est cyclique.