Dept Math
Univ Orleans

Géométrie Affine 1

7 Corrigé

(a) $f(B) = h_3(h_2(h_1(B))) = h_3(h_2(C)) = h_3(A) = B$

(b) on suppose que P, Q et R appartiennent à une même droite Δ.
Cette droite est donc invariante par h_1, h_2 et h_3 et par conséquence par f. Comme les seules droites invariantes par une homothétie de rapport $\neq 1$ sont les droites passant par son unique point fixe, f n'est pas une homothétie de rapport $\neq 1$. D'après le corollaire 1.2.8, $\vec{f} = \vec{h_3} \circ \vec{h_2} \circ \vec{h_1} = Id_{\vec{E}}$
En appelant λ_i le rapport de l'homothétie h_i, on a $\lambda_3 \lambda_2 \lambda_1 = 1$
En remplaçant $\lambda_1 = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$, $\lambda_2 = \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$, $\lambda_3 = \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}}$, on obtient la relation demandée

(c) La relation $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ entraîne que $\vec{f} = Id_{\vec{E}}$ et donc que f est une translation. Comme f a un point fixe, $f = Id_E$.
Montrons que la relation $h_3 \circ h_2 \circ h_1 = Id_E$ entraîne que les centres P, Q et R de ces homothéties sont alignés.
On a $h_2 \circ h_1(R) = h_3^{-1}(R) = R$. Donc

$$\overrightarrow{Ph_1(R)} = \lambda_1 \overrightarrow{PR} \quad \text{(par définition de } h_1)$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{Q h_2(h_1(R))} = \lambda_2 \overrightarrow{Q h_1(R)} \quad \text{(par définition de } h_2)$$

$$= \lambda_2(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{Ph_1(R)}) = \lambda_2 \overrightarrow{QP} + \lambda_1 \lambda_2 \overrightarrow{PR}$$

En écrivant $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$, on obtient

$$(\lambda_2 - 1)\overrightarrow{PQ} = (\lambda_1 \lambda_2 - 1)\overrightarrow{PR}$$

ce qui montre que P, Q et R sont alignés.

Géométrie Affine 2

#3 Corrigé

(a) On montre d'abord que f est une application affine : on cherche une application linéaire $v : \vec{E} \to \vec{E}$ telle que

$$\forall M, N \in E \qquad \overrightarrow{f(M)f(N)} = v(\overrightarrow{MN})$$

on a

$$f(M) = M + 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$
$$f(N) = N + 3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}$$

D'où

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(M)f(N)} &= \overrightarrow{MN} + 3(\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{MA}) + 2(\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{NM} + 2\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NM} \\ &= -5\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

L'application linéaire cherchée est l'homothétie linéaire $v(\vec{a}) = -5\vec{a}$.

Donc f est une application affine avec $\vec{f} = v$

D'après le cours (corollaire 1.2.8), f est une homothétie de rapport -5.

Cherchons son point fixe (unique d'après le lemme 1.2.7)

$$f(G) = G \iff 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

G est le barycentre de la famille de points pondérés $((A,3),(B,2),(C,1))$

on peut écrire

$$f(M) = G - 5\overrightarrow{GM}.$$

(b) on procède comme en (a) :

$$g(M) = M + 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$
$$g(N) = N + 3\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{g(M)g(N)} &= \overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{NM} - 2\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NM} \\ &= \overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

L'application linéaire cherchée est l'application identique $Id_{\vec{E}}$

D'après la proposition 1.2.3, g est une translation. Le vecteur de translation $\vec{a}$ tel que $g = \tau_{\vec{a}}$ est donné par

$$\begin{aligned}\vec{a} = \overrightarrow{Mg(M)} &= 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \\ &= 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) \\ &= 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$g(M) = M + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$$

\#5 La convexité de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ s'exprime par

(i) $\forall (M,N) \in E^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda M + (1-\lambda)N) \leq \lambda f(M) + (1-\lambda) f(N)$

La convexité du surgraphe de f s'exprime par

(ii) $\forall (M,N) \in E^2, \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \ f(M) \leq s$ et $f(N) \leq t \Rightarrow \forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda M + (1-\lambda)N) \leq \lambda s + (1-\lambda)t$$

Ces deux conditions sont clairement équivalentes

\#7 On note z_i l'affixe de A_i et z l'affixe de G. D'après l'une des définitions du barycentre, on a $z = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$.

En notant w une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité primitive, l'affixe de l'isobarycentre des racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 est $\quad z = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w^k = \dfrac{1}{n} \dfrac{1 - w^n}{1 - w} = 0$