# UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

**Licence – 5MT02** **Année 2006-2007**

## Partiel

*Vendredi 17 Octobre 2006*
*Durée 2 heures*

### Exercice I

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on désigne par

$$\mathbb{U}(\mathbb{Z}_n) = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{Z}_n \quad | \quad \exists \overline{y} \in \mathbb{Z}_n \quad \text{avec} \quad \overline{x} \times \overline{y} = \overline{1} \right\}$$

le groupe des éléments inversibles dans $\mathbb{Z}_n$ pour la multiplication $\times$ des classes.

1. Montrer que $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_n) = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{Z}_n \quad | \quad x \wedge n = 1 \right\}$.
2. Montrer que $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_2)$ et $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{2^2})$ sont des groupes cycliques.
3. On suppose, dorénavant, que $n = 2^k$ avec $k \geqslant 3$.
   Quel est l'ordre du groupe $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{U}(\mathbb{Z}_{2^k})$ ?
4. Montrer que les trois éléments $\alpha = \overline{2^{k-1} - 1}$ , $\beta = \overline{2^{k-1} + 1}$ et $\gamma = \overline{2^k - 1}$ sont dans le groupe $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{2^k})$, sont 2 à 2 distincts et qu'ils sont tous d'ordre 2.
5. Montrer que tout groupe cyclique $H$ d'ordre pair ($\#(H) = 2\ell$) possède un unique élément d'ordre 2.
6. Conclure.
7. Montrer que le groupe $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{16})$ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

### Exercice II

Soit $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à $n$ lignes et $m$ colonnes et à coefficients réels. Si $n = m$ nous utiliserons la notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et nous identifierons toute matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
Posons $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\{E_1 , \ldots , E_n\}$ sa base canonique. Nous munirons cet espace de son produit scalaire canonique :

$$\langle U , V \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j \, v_j$$

si $U = {}^t(u_1 \cdots u_n) \in \mathcal{V}$ et $V = {}^t(v_1 \cdots v_n) \in \mathcal{V}$ ; c'est aussi l'unique coefficient de la matrice à une ligne et une colonne ${}^tU\,V$.
Pour tout vecteur non nul $U = {}^t(u_1 \cdots u_n) \in \mathcal{V}$, on désigne par $H(U)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$H(U) = I_n - 2\,\frac{U\,{}^tU}{\|\,U\,\|^2}$$

où $I_n$ est la matrice–unité d'ordre $n$, et $\| U \| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$ est la norme associée au produit scalaire canonique.
On convient de poser $H(U) = I_n$ si $U = {}^t(0 \ \cdots \ 0)$ est le vecteur nul de $\mathcal{V}$ et nous noterons par $\mathcal{H} = \left\{ H(U) \quad | \quad U \in \mathcal{V} \right\}$ l'ensemble de ces matrices.

1. Montrer que si $O$ est une matrice orthogonale d'ordre $n$ et si $V = O\,U$, alors
$$H(V) = O\,H(U)\,O^{-1}$$
2. Montrer que la matrice $H(U)$ est symétrique et orthogonale.
3. Soit $\mathcal{D} = \mathbb{R}\,U$ la droite vectorielle de $\mathcal{V}$ engendrée par $U$ et soit $\mathcal{D}^\perp$ l'hyperplan orthogonal à $\mathcal{D}$. Nous noterons par $\Phi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ et $\Psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ les applications définies par
$$\Phi(X) = H(U)\,X \quad \text{et} \quad \Psi(X) = -H(U)\,X$$
Vérifier que $\mathcal{D}$ est stable par $\Phi$ et que pour tout $V \in \mathcal{D}^\perp$, on a $\Phi(V) = V$.
4. Quelle est la nature géométrique des deux applications $\Phi$ et $\Psi$ ?
5. Si $A = {}^t(a_1 \ \ldots \ a_n) \in \mathcal{V}$ avec $A \neq \pm \| A \|\, E_1 = \begin{pmatrix} \pm \| A \| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, montrer que
$$H\big(A + \| A \|\, E_1\big)\, A = -\| A \|\, E_1 \quad \text{et} \quad H\big(A - \| A \|\, E_1\big)\, A = \| A \|\, E_1$$
6. En déduire la construction d'une base orthonormée $\mathcal{B} = \left\{ A\,,\, F_2\,,\, F_3\,,\, F_4 \right\}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ admettant $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme premier vecteur.
7. Notre objectif dans cette question est de montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $M = Q\,R$ où $Q$ est une matrice orthogonale et $R$ est une matrice triangulaire supérieure et pour cela nous procédons de la façon suivante :
Si $M = (M_1 \ M_2 \ \cdots \ M_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $M_1\,,\, M_2\,,\, \ldots\,,\, M_n$ sont ses vecteurs–colonnes, montrer en appliquant (plusieurs fois) le résultat de la question 5 à ces vecteurs–colonnes, que l'on peut construire une suite de matrices $H^1\,,\, H^2\,,\, \ldots\,,\, H^n \in \mathcal{H}$ et une suite de matrices $M^1\,,\, M^2\,,\, \ldots\,,\, M^{n+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^1 = M$, $M^{k+1} = H^k\, M^k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $M^{n+1} = R$ où chaque matrice $M^k$ possède des zéros sous la diagonale dans ses $k-1$ premières colonnes et $R$ est une matrice triangulaire supérieure.
8. Appliquer le procédé précédent pour écrire la matrice $M$ suivante sous la forme $Q\,R$ :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -20 & 14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$