
Examen, première session : corrigé

Exercice 1.

1. L'expression définissant f a un sens dès que $x^2 + y^2 = \|(x, y)\|_2^2 \neq 0$. La propriété de norme implique donc que f est définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

2. Etant obtenue comme produit d'une fonction \mathcal{C}^∞ et d'une fraction rationnelle, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur son domaine de définition.

3. Ecrivons

$$f(x, y) = x \times \frac{\sin(\|(x, y)\|_2^2)}{\|(x, y)\|_2^2}.$$

Comme $x \rightarrow 0$ et $\|(x, y)\|_2^2 \rightarrow 0$ lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, la limite de f est $0 \times 1 = 0$ car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

4. On obtient donc un prolongement continu de f à \mathbb{R}^2 en posant $f(0, 0) = 0$.

5. En raisonnant comme en 1., on voit que f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Après calcul,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \sin(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \cos(x^2 + y^2).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \left[\cos(x^2 + y^2) - \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right].$$

6. Les dérivées partielles sont continues, ce qui suffit à établir f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, donc différentiable sur ce même ouvert (**Prop. 16.7** du cours).

7. Ecrivons l'expression proposée sous la forme

$$\frac{\sin(2x^2)}{2x^2} \times \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{2}}.$$

Cette expression tend vers $1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ et vers $1 \times -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque $x \rightarrow 0^-$ et n'admet donc pas de limite en 0.

L'énoncé comportait une erreur : on n'en déduit pas que f est non différentiable en $(0, 0)$. En effet, il apparaît que $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne se prolonge pas en $(0, 0)$ et donc f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 , mais f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$, valant respectivement $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin(h^2)}{h^2} \times \frac{1}{h} = 1$ et $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \sin(k^2)}{k^2} \times \frac{1}{k} = 0$. Cela n'implique pas la différentiabilité de f en ce point (ni même la continuité en général) mais on montre à la main que f est différentiable en $(0, 0)$ avec $df_{(0,0)}(h, k) = h$ car $f(h, k) - f(0, 0) - h = o(\|(x, y)\|)$.

Exercice 2.

1. La fonction f est polynômiale, donc de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 . Ses dérivées partielles valent respectivement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 6(x - 2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 4(y^3 - z) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 4(z - y).$$

L'expression de la première dérivée partielle montre que tous les points critiques ont pour abscisse $x = 2$. Des autres expressions on déduit $z = y = y^3$. L'équation $\alpha^3 = \alpha$ admet exactement trois solutions : $-1, 0$ et 1 . Les points critiques sont donc $(2, 0, 0)$, $(2, -1, -1)$ et $(2, 1, 1)$.

2.a. Pratiquons la réduction de Gauss en choisissant z comme variable. Alors $q(x, y, z) = (2z - 2y)^2 + 8y^2 + 6x^2$ et la signature est $(3, 0)$, *id est* la forme q est définie positive.

2.b. Les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ sont constamment nulles. En vertu du théorème de Schwarz, il reste seulement à calculer :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \equiv 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 12y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \equiv 4 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \equiv -4.$$

En n'oubliant pas que les dérivées croisées donnent lieu à un facteur 2 dans la forme quadratique hessienne, on obtient $Qf_{(2,1,1)} = Qf_{(2,-1,-1)} = q$.

2.c. D'après 2.a. et 2.b., f admet des minima locaux en $(2, -1, -1)$ et $(2, 1, 1)$.

3.a. On calcule $f(2, y, ry) - f(2, 0, 0) = y^2 [2r^2 - 4r + y^2]$.

3.b. L'expression proposée est un trinôme du second degré en r , de coefficient directeur positif et de discriminant réduit $4 - 2\lambda$. Comme $\lambda \in [0, 1]$, ce discriminant est > 0 et le trinôme admet deux racines réelles distinctes entre lesquelles il est négatif et à l'extérieur desquelles il est positif. Ces racines sont $\pm 1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{2}}$.

3.c. Notons $r(y)$ l'une des deux racines trouvées à la question précédente. On a $\lim_{y \rightarrow 0} r(y)y = 0$, donc toute boule ouverte centrée en $(2, 0, 0)$ contient des points de la forme $(2, y, r(y)y)$ avec $y^2 \in [0, 1]$. La fonction r étant continue, toute boule ouverte centrée en $(2, 0, 0)$ contient des points de la forme $(2, y, (r(y) + \varepsilon)y)$ et $(2, y, (r(y) - \varepsilon)y)$ pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. D'après la question 3.a., le signe de $f(2, y, ry) - f(2, 0, 0)$ est celui de $y^2 [2r^2 - 4r + y^2]$. En prenant $r = r(y) - \varepsilon$ puis $r = r(y) + \varepsilon$, on trouve dans toute boule centrée en $(2, 0, 0)$ des points où ce signe est négatif et des points où il est positif. Par conséquent, f ne présente pas d'extrémum en ce point critique.

Exercice 3.

Après avoir constaté que, par composition, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = z \ln(y) - 2xy^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{xz}{y} - 2x^2y \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x \ln(y) - \frac{1}{e^2}.$$

Le système donnant les points critiques est donc :
$$\begin{cases} z \ln(y) = 2xy^2 \\ xz = 2x^2y^2 \\ x \ln(y) = \frac{1}{e^2} \end{cases}$$

La troisième ligne montre que $x \neq 0$ et $y \neq 1$. On obtient par conséquent, que la seconde ligne est équivalente à $z = 2xy^2$. On en déduit, grâce à la première ligne, que $\ln(y) = 1$, soit $y = e$. La troisième ligne permet de conclure que $x = \frac{1}{e^2}$ et la première que $z = 2$. Ainsi, l'unique point critique de f est $(\frac{1}{e^2}, e, 2)$.