
Examen, seconde session : corrigé

Exercice 1.

- a. Pour $n \geq 1$, $n^\gamma u_n = n^{\gamma-\alpha} \ln n$. Or $\gamma - \alpha < 0$ par hypothèse donc, par théorème de croissances comparées, $n^\gamma u_n \rightarrow 0$.
- b. Comme $\alpha > 1$ par hypothèse, la règle de RIEMANN s'applique et la série est convergente.
- c. Pour $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$, terme général d'une série de Riemann divergente lorsque $\alpha \leq 1$.

Exercice 2.

Soit $x \in [0, 1[$ **fixé**. La suite (géométrique) $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite 0 donc $f_n(x) \rightarrow xe^x$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. La limite simple de la suite est donc la fonction définie sur $[0, 1[$ par $x \mapsto xe^x$.

Exercice 3.

- a. La fonction f est définie pour tout couple (x, y) tel que $x^4 + y^2 \neq 0$. Or $x^4 = -y^2$ implique que $x^4 \leq 0$ soit $x = 0$ d'où $y = 0$. Le domaine cherché est donc $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
- b. Les coordonnées de u_n sont des suites tendant vers 0 donc u_n tend vers $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 .
- c. Pour $n \geq 1$, $f(u_n) = \frac{1}{2}$ donc la limite cherchée est $\frac{1}{2}$. Si f était continue en $(0, 0)$, $f(u_n)$ tendrait vers $f(0, 0) = 0$ pour toute suite convergeant vers $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 (définition de la continuité).
- d. Pour $n \geq 1$, $g(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{n}{1+n^2} \rightarrow 0$. Par conséquent, g ne peut pas être prolongée par continuité en $(0, 0)$ car la valeur du prolongement en $(0, 0)$ devrait à la fois valoir $\frac{1}{2}$ (d'après b.) et 0, ce qui est impossible.
- e. La fonction f étant une fraction rationnelle, elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur son domaine de définition. Elle admet donc des dérivées partielles, valant respectivement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy}{(x^4 + y^2)^2}(y^2 - x^4) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2}{(x^4 + y^2)^2}(x^4 - y^2).$$

- f. Il n'y avait pas de question f. g. Les deux quantités dont on prend la limite sont constamment nulles et admettent donc 0 pour limite. Les dérivées partielles existent donc et valent 0.

Remarque : on se trouve donc en présence d'une fonction admettant des dérivées partielles (mais non différentiable!) en un point où elle est discontinue.

Exercice 4.

a. On note φ_1 et φ_2 respectivement les composantes de φ . La première est de classe \mathcal{C}^∞ par composition, de même que la seconde, qui est bien définie sur \mathbb{R}^2 entier car pour tout x réel, $1 + x^2$ est dans le domaine de définition de \ln .

b. On calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) = e^y, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) = xe^y, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy}{1+x^2}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) = \ln(1+x^2).$$

En évaluant ces expressions en $(1, 1)$, on en déduit que la matrice jacobienne de φ en ce point est $\begin{bmatrix} e & e \\ 1 & \ln 2 \end{bmatrix}$.

c. Le déterminant de cette matrice vaut $(\ln(2) - 1)e$.