GALOIS 2016

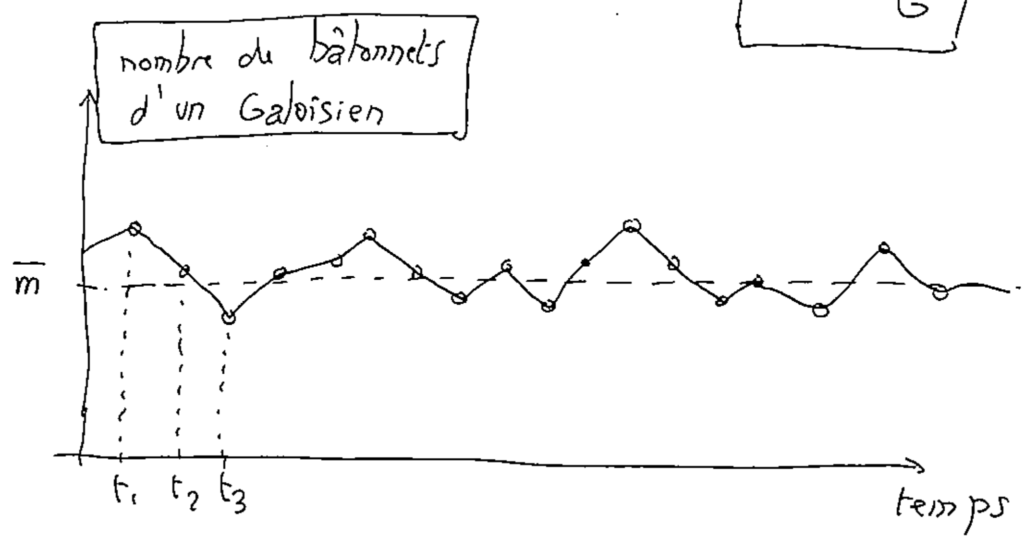
par Olivier BRODIER

1. On dispose de M bâtonnets à distribuer aléatoirement entre G Galoisiens. Ici $M = 157$ et $G = 14$.

On établit un tableau de répartition des bâtonnets. Régulièrement, il y a des échanges de bâtonnets entre les voisins, ce qui change la distribution :

temps	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	M = TOTAL
t_1	5	7	3	7	8	9									157
t_2	8	4	7	11	5	6									157
t_3	9	6	5	13	9	3									
...															
moyenne	$\frac{17}{3}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{31}{3}$											

fluctuations autour de la moyenne $\boxed{\overline{m} = \frac{M}{G}}$:



2. On s'intéresse à la probabilité qu'un Galoisien g aie en sa possession m batônnets

$$p_g(m) = \frac{\text{nombre de possibilités où le Galoisien possède } m \text{ bâtonnets}}{\text{nombre total de possibilités}}$$

on note : $\#(M, G)$ le nombre de possibilités de distribuer M bâtonnets parmi une assemblée de G Galoisiens.

le nombre de possibilités où le Galoisien g possède m bâtonnets correspond au nombre de possibilités de distribuer M-m bâtonnets aux G-1 autres Galoisiens

Ainsi : $$\boxed{p_g(m) = \frac{\#(M-m, G-1)}{\#(M, G)}} \quad (1)$$

3. On voudrait donc évaluer $\#(M, G)$ quel que soient M et G.

on essaie déjà pour les petites valeurs de G :

$\#(M, 1) = 1$ il y a une seule façon de distribuer M bâtonnets à 1 Galoisien.

ensuite $\#(M, 2)$ on choisit au hasard une quantité m avec $0 \leq m \leq M$ qu'on donne au Galoisien n° 1, puis on donne le reste au Galoisien n° 2. Ça fait M+1 possibilités : $m = \underbrace{0, 1, 2, \dots, M}_{M+1}$

donc $\#(M,2) = M+1$

Par récurrence : pour calculer $\#(M,G)$ on choisit au hasard 1 Galaisien : les seules possibilités c'est qu'il ait m bâtonnets avec $m = 0, 1, 2, \ldots, M$

si $m = 0$ alors les $G-1$ Galaisiens restants se partagent M bâtonnets

si $m = 1$ " " " " " " $M-1$ "

$\vdots$

si $m = M-1$ " " " " " " 1 "

si $m = M$ " " " " " " 0 "

donc au total on a :

$$\#(M,G) = \#(M,G-1) + \#(M-1,G-1) + \cdots + \#(1,G-1) + \#(0,G-1)$$

$$\boxed{\#(M,G) = \sum_{m=0}^{M} \#(m,G-1)} \quad (2)$$

4. On a calculé $\#(M,2) = M+1$

donc d'après (2) :

$$\#(M,3) = \#(0,2) + \#(1,2) + \cdots + \#(M-1,2) + \#(M,2)$$

$$\#(M,3) = 1 + 2 + \cdots + M + (M+1)$$

$$\boxed{\#(M,3) = \frac{(M+1)(M+2)}{2}}$$

comme M va être très grand, on fait l'approximation suivante : $\boxed{\#(M,3) \simeq \frac{M^2}{2}}$ (3)

de même :

$$\#(M,4) = \#(0,3) + \#(1,3) + \dots + \#(M-1,3) + \#(M,3)$$
$$\simeq 1 + 3 + \dots + \frac{M(M+1)}{2} + \frac{(M+1)(M+2)}{2}$$

d'après l'approximation (3) :

$$\#(M,4) \simeq 0 + \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{(M-1)^2}{2} + \frac{M^2}{2}$$

on sait que $\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + M^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}}$ (4)

en fait, comme M est grand, on peut même dire :

$$1^2 + 2^2 + \dots + M^2 \simeq \frac{M^3}{3}$$

autrement dit :

$$\#(M,4) \simeq \frac{1}{2}\left(1^2 + 2^2 + \dots + M^2\right)$$
$$\simeq \frac{1}{2}\left(\frac{M^3}{3}\right)$$

$$\boxed{\#(M,4) \simeq \frac{M^3}{3!}}$$

on sait que (4) se généralise pour les autres puissances, et qu'on a :

$$1^n + 2^n + \dots + (M-1)^n + M^n \simeq \frac{M^{n+1}}{n+1}$$

on voit donc qu'on peut calculer

$$\#(M,5) = \frac{1^3}{3!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{M^3}{3!}$$
$$\simeq \frac{1}{3!}\left(\frac{M^4}{4}\right) = \frac{M^4}{4!}$$

on devine que ça va rester général, avec

$$\boxed{\#(M, G) \approx \frac{M^{G-1}}{(G-1)!}}$$

5. on peut à présent évaluer la probabilité

$$P_g(m) = \frac{\#(M-m, G-1)}{\#(M, G)}$$

donc

$$P_g(m) \approx \frac{(M-m)^{G-2}}{(G-2)!} \times \frac{(G-1)!}{M^{G-1}}$$

$$\approx \frac{(M-m)^{G-2}}{M^{G-1}} \times \frac{(G-1)!}{(G-2)!}$$

$$\approx \frac{1}{M-m} \times \frac{(M-m)^{G-1}}{M^{G-1}} \times \frac{G-1}{1}$$

$$\approx \frac{G-1}{M-m} \left(\frac{M-m}{M}\right)^{G-1}$$

$$\boxed{P_g(m) \approx \frac{G-1}{M-m} \left(1 - \frac{m}{M}\right)^{G-1}}$$

à nouveau, on suppose que m est petit devant M

et que G est grand

on peut donc avoir une bonne estimation avec

$$\boxed{P_g(m) \approx \frac{G}{M} \left(1 - \frac{m}{M}\right)^{G}}$$

6 - on sait que $\left(1 - \frac{x}{N}\right)^N \xrightarrow[N \to \infty]{} e^{-x}$

et on a défini $\bar{m} = \frac{M}{G}$

on peut donc écrire :

$$\boxed{P_g(m) \simeq \frac{1}{\bar{m}} e^{-\frac{m}{\bar{m}}}}$$

7. En physique statistique dans un gaz dit "parfait" la probabilité qu'une particule possède une énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ est proportionnelle à

$$e^{-\frac{\frac{1}{2} m v^2}{kT}}$$

qui est appelé $\boxed{\text{facteur de Boltzmann}}$

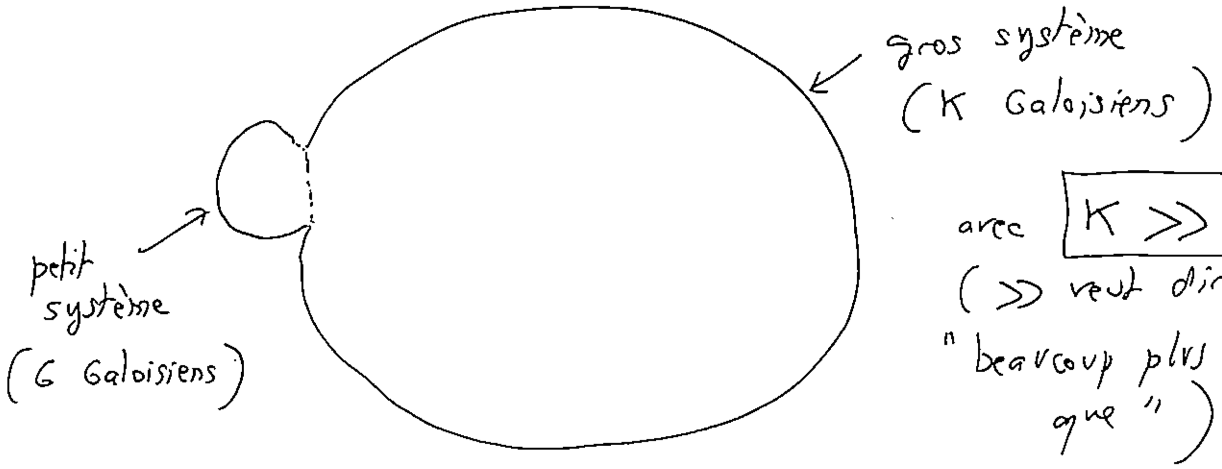
et T est interprété comme la température du gaz, et $\frac{1}{2} kT$ est l'énergie cinétique moyenne de la particule.

la température est donc interprétée comme l'énergie cinétique moyenne des particules pour un gaz "parfait". (à un facteur $\frac{1}{2} k$ près)

on voit donc que l'exemple des bâtonnets se comporte de façon similaire à un système physique standard : le gaz parfait.

C'est avec ce type d'analogies que les physiciens se sont convaincus que la matière était constituée de grains de matière (les atomes) ayant des comportements en partie aléatoires, et que ce que l'on observait à notre échelle s'expliquait comme le comportement <u>moyen</u> de tous ces atomes.

8. <u>Thermalisation</u> :



avec $\boxed{K \gg G}$

($\gg$ veut dire "beaucoup plus grand que")

En tout il y a $\mathcal{M}$ bâtonnets :

M dans le petit système

$\mathcal{M} - M$ dans le grand système

$\boxed{\text{Mais } M \text{ peut varier}}$

Comme le grand système est très grand, il n'est pas très influencé par le petit système. On note

$\boxed{\bar{\mu} = \dfrac{\mathcal{M}}{K+G}}$ la moyenne des bâtonnets possédés par un Galoisien du Grand système + le petit système le nombre de possibilités que le petit système ait un nombre M de bâtonnets est donné par

$$N(M) = \underbrace{\#(M, G)}_{\substack{\text{nombre de} \\ \text{possibilités dans} \\ \text{le petit système}}} \times \underbrace{\#(\mathcal{M} - M, K)}_{\substack{\text{nombre de possibilités} \\ \text{dans le grand système}}}$$

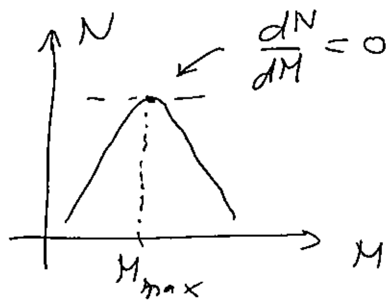
ainsi

$$\boxed{N(M) \simeq \frac{M^{G-1}}{(G-1)!} \times \frac{(\mathcal{M} - M)^{K-1}}{(K-1)!}}$$

on va voir que ce nombre possède un maximum pour une valeur de M notée M_{max}

on doit avoir :

$$\boxed{\frac{dN}{dM}(M_{max}) = 0}$$



faisons le calcul :

$$\frac{dN}{dM} = \frac{(G-1)\, M^{G-2}}{(G-1)!} \times \frac{(\mathcal{M} - M)^{K-1}}{(K-1)!} + \frac{M^{G-1}}{(G-1)!} \times \frac{-(K-1)(\mathcal{M} - M)^{K-2}}{(K-1)!}$$

$$\frac{dN}{dM} = \frac{M^{G-2}}{(G-2)!} \times \frac{(\mathcal{M} - M)^{K-1}}{(K-1)!} - \frac{M^{G-1}}{(G-1)!} \frac{(\mathcal{M} - M)^{K-2}}{(K-2)!}$$

$$\frac{dN}{dM} = \frac{M^{G-2}}{(G-2)!}\frac{(\mathcal{M}-M)^{K-2}}{(K-2)!}\left(\frac{\mathcal{M}-M}{K-1} - \frac{M}{G-1}\right)$$

donc $\frac{dN}{dM} = 0$ si $\boxed{\frac{\mathcal{M}-M}{K-1} = \frac{M}{G-1}}$

moyenne du grand système — moyenne du petit système

ce qui veut dire que la configuration la plus probable c'est celle où les deux systèmes ont la même moyenne.

En laissant tomber les -1 puisque K et G sont de grands nombres, on a

$$\frac{\mathcal{M}-M}{K} = \frac{M}{G}$$

et on a aussi

$$\boxed{\frac{\mathcal{M}-M}{K} = \frac{M}{G} = \frac{\mathcal{M}}{K+G} = \bar{\mu}}$$

en effet

$$\frac{\mathcal{M}-M}{K} = \frac{M}{G} = \frac{\mathcal{M}-M}{K}\times\frac{K}{K+G} + \frac{M}{G}\times\frac{G}{K+G} \quad \text{puisque } \frac{K}{K+G}+\frac{G}{K+G}=1$$

$$= \frac{\mathcal{M}-M}{K+G} + \frac{M}{K+G} = \frac{\mathcal{M}}{K+G}$$

En physique statistique, on dit que la température a tendance à s'uniformiser : à l'équilibre, tous les systèmes ont la même température.