Construction du pentagone régulier

——-

1. Constructions à la règle et au compas

Avant l'apparition et l'utilisation du dessin assisté par ordinateur, les dessinateurs utilisaient, pour des tracés précis, la règle, le compas et l'équerre. L'utilisation de l'équerre est pratique, mais on pourrait tracer des angles droits avec seulement la règle et le compas. La propriété de la médiatrice d'un segment (étudiée en classe de sixième) permet cela.

Pour construire un polygone régulier à n sommets, on doit placer sur un cercle ces n sommets, régulièrement espacés par des angles de $2\pi/n$ radians. Quels sont les polygones réguliers que l'on peut tracer avec la règle et le compas ? La question a été résolue en 1796 par Carl Friedrich GAUSS (1777-1855).

THÉORÈME. - *Pour que le polygone régulier à n sommets soit constructible à la règle et au compas, il faut et il suffit que l'entier n soit de la forme*

$$n = 2^r p_1 \dots p_s,$$

où les nombres $p_1, \dots p_s$ sont des nombres premiers [1] distincts entre eux, et de la forme

$$p_i = 2^{2^k} + 1. \tag{1}$$

C'est un résultat que l'on démontre à Bac+4 aux étudiants de maitrise de mathématiques en utilisant la théorie de GALOIS. J'ignore comment le jeune GAUSS avait pu le démontrer.

Un mot sur les nombres premiers rencontrés dans cet énoncé. On les appelle les nombres premiers de FERMAT. Le mathématicien Pierre de FERMAT (1601-1665), conseiller au Parlement de Toulouse, était amateur d'Arithmétique. On lui doit une célèbre conjecture qui n'a été démontrée que récemment, en 1993, par Andrew WILES. Il avait par ailleurs remarqué que la relation (1) produisait des nombres premiers :

$$\mathrm{F}_0 = 2+1 = 3,\ \mathrm{F}_1 = 2^2+1 = 5,\ \mathrm{F}_2 = 2^4+1 = 17,\ \mathrm{F}_3 = 2^8+1 = 257,\ \mathrm{F}_4 = 2^{16}+1 = 65\,537.$$

C'est Leonhard EULER (1707-1783) qui constata le premier que le nombre F_5 n'était pas un nombre premier :

$$\mathrm{F}_5 = 2^{32}+1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

Depuis, avec l'aide des ordinateurs et de développements de l'Arithmétique, on n'a pas trouvé d'autre nombre premier autre que les cinq premiers parmi les nombres de FERMAT, et ceci jusqu'à F_{30} et quelques autres [2].

[1] Un nombre premier est un nombre entier $p \geqslant 2$ qui n'a pas d'autre diviseur que les diviseurs évidents 1 et p.

[2] Voir le livre de Jean-Paul DELAHAYE, *Merveilleux nombres premiers*, Belin, 2000

2. Calculs trigonométriques

Nous allons essayer de déterminer les coordonnées des sommets d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 . Pour cela, il y aura un calcul trigonométrique puis quelsues péripéties algébriques.

Calculons les coordonnées

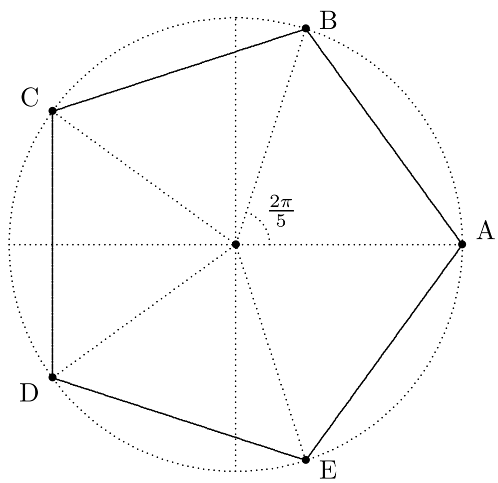
$$x = \cos\frac{2\pi}{5}, \qquad y = \sin\frac{2\pi}{5},$$

du point B de la figure. Comment faire ? Nous ne connaissons que des formules pour l'addition des angles et pas de formules pour la division par 5 . Je vois deux méthodes. En posant $\theta = 2\pi/5$, écrire la condition nécessaire

$$\cos 5\theta = 1, \tag{2}$$

ou bien écrire une autre condition nécessaire

$$\cos 4\theta = \cos\theta. \tag{3}$$



Formules d'addition.

En classe de seconde et en classe de première, on apprend les formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b\,-\,\sin a\,\sin b,$$

$$\sin(a+b) = \sin a\,\cos b\,+\,\cos a\,\sin b.$$

À partir de ces formules, on peut calculer

$$\cos 2\theta = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = 2(\cos\theta)^2 - 1,$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\,\cos\theta.$$

Puis

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta,$$

$$\sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta) = 3\sin\theta - 4(\sin\theta)^3.$$

Et enfin

$$\cos 5\theta = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$\sin 5\theta = y(16x^4 - 12x^2 + 1),$$

en posant $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$ pour clarifier les calculs.

Discussion de l'équation $\cos 5\theta = 1$.

L'équation s'écrit

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0. \tag{4}$$

Nous ne savons pas trouver les racines d'un polynome de degré 5 . Il faut donc regarder de plus près. Les angles θ pour lesquels $\cos 5\theta = 1$ sont bien au nombre de 5 . Il y a $\theta = 0$, $\theta = \pm 2\pi/5$ et $\theta = \pm 4\pi/5$.

La solution $\theta = 0$ donne $x = \cos 0 = 1$ qui est bien solution de l'équation (4) . En Algèbre, on sait alors que notre polynome de degré 5 est multiple du polynome $x - 1$. En effet

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = (x - 1)(16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x - 1).$$

Par ailleurs, les deux valeurs $\theta = 2\pi/5$ et $\theta = -2\pi/5$ donnent la même valeur à $x = \cos\theta$. D'où une racine double à l'équation (4) . Il en est de même pour les valeurs $\theta = \pm 4\pi/5$. Finalement le polynome

$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1$$

possède deux racines doubles. On sait alors que c'est un carré. En effet

$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = (4x^2 + 2x - 1)^2.$$

Discussion de l'équation $\cos 4\theta = \cos\theta$.

C'est un peu une astuce pour éviter de calculer $\cos 3\theta$ et $\cos 5\theta$. Mais c'est aussi une vérification, toujours utile. Nous avons la formule du doublement de l'angle donnant $\cos 2\theta$ en fonction de $\cos\theta$. On l'applique à nouveau pour obtenir $\cos 4\theta$.

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= 2(2(\cos\theta)^2 - 1)^2 - 1, \\ &= 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{aligned}$$

Comme précédemment, il ne s'agit que d'une condition nécessaire et il peut s'être introduit des solutions étrangères à notre recherche. En effet, comme précédemment, $\theta = 0$ qui donne $x = 1$ est bien solution de

$$\cos 4\theta = \cos\theta.$$

On vérifie :

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = (x - 1)(8x^3 + 8x^2 - 1).$$

Il y a encore une solution parasite $\theta = 2\pi/3$ qui donne $x = -1/2$ et l'on a

$$8x^3 + 8x^2 - 1 = (2x + 1)(4x^2 + 2x - 1).$$

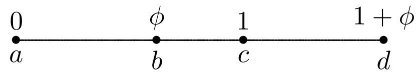
Conclusion

Les abscisses $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$ sont les solutions de l'équation du second degré

$$4x^2 + 2x - 1 = 0 \tag{5}$$

3. Le nombre d'or

Par définition, le *nombre d'or*, ou la *section dorée*, est la fraction ϕ de l'unité dont le rapport à l'unité est égal au rapport de l'unité à sa réunion $1+\phi$ à l'unité.



Cela s'écrit

$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{1+\phi}\,\cdot \tag{6}$$

et on peut en déduire aussi

$$\phi = \frac{1-\phi}{\phi}\cdot$$

ou encore, avec les notations de la figure,

$$\phi = \frac{bc}{ab} = \frac{ab}{ac} = \frac{ac}{ad}\cdot \tag{7}$$

La relation (6) signifie que le nombre ϕ est une solution de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0\,. \tag{8}$$

Si l'on connaît par cœur les formules qui donnent les solutions d'une équation du second degré, les deux solutions sont

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,\cdot$$

La première est la solution positive ϕ, la deuxième solution est négative ; on nomme en général ψ son opposée

$$\phi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\cdot$$

Prenons la calculatrice

$$\phi = 0,61803\ldots \quad \text{et} \quad \psi = 1,61803\ldots$$

Les relations entre les solutions de l'équations du second degré s'écrivent

$$\psi = 1+\phi \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1}{\phi}\,\cdot$$

Si l'on ne connaît pas les formules qui donnent les solutions d'une équation de degré 2 , on écrit l'équation

$$x^2 + x = 1,$$

et on développe

$$(x+\frac{1}{2})^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

d'où

$$x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot$$

Petite digression sur le nombre d'or ϕ. Les égalités (7) des proportions dans la petite figure se traduisent dans la réalité par des proportions agréables à l'œil. Depuis l'Antiquité, artistes et architectes ont utilisé cette proportion. On dit que le rapport des longueurs des cotés du Parthénon est le nombre d'or. Mais on l'a aussi vu là où il n'était peut-être pas.

La suite des fractions convergentes du nombre d'or ϕ est la suivante :

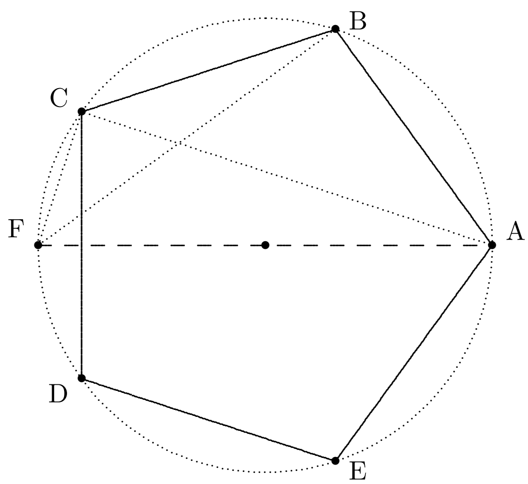
$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{8}{13}, \ldots$$

Ceci pour dire que beaucoup de fractions rationnelles approchent très bien le nombre d'or. Avez-vous remarqué que la suite des dénominateurs et la suite décalée des numérateurs ressemblent à la suite de FIBONACCI ?

4. Retour au pentagone régulier

En comparant les équations (5) et (8) , on s'aperçoit que l'on a

$$2\cos(2\pi/5) = \phi, \qquad 2\cos(4\pi/5) = -\psi.$$



Dans la figure ci-dessus, le triangle AFC est rectangle en C (angle inscrit dans un demi-cercle). L'angle en F vaut $2\pi/5$ (angle inscrit moitié de l'angle au centre). On a donc

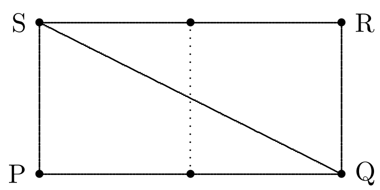
$$\mathrm{FC} = 2\cos(2\pi/5) = \phi\,.$$

De même, en considérant le triangle AFB , on obtient

$$\mathrm{FB} = 2\cos(\pi/5) = \psi\,.$$

Il reste donc à construire ϕ et ψ , c'est-à-dire $(-1+\sqrt{5})/2$ et $(1+\sqrt{5})/2$.

Pour construire le nombre $\sqrt{5}$ avec la règle et le compas, il suffit de remarquer que c'est la longueur de la diagonale d'un rectangle dont les côtés ont pour longueurs 1 et 2 (théorème de PYTHAGORE).



Voici donc une construction du pentagone régulier. Dans la figure ci-dessous, le rectangle AGLF a des côtés qui mesurent 1 et 2 . Sa diagonale FG mesure donc $\sqrt{5}$. Le point I est le milieu de la diagonale. Le cercle de centre I , passant par l'origine O , a pour rayon $1/2$. Le segment FI a pour longueur $\sqrt{5}/2$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{FH} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \phi \quad \text{et} \quad \mathrm{FK} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \psi\,.$$

D'où la construction des points B et E , puis C et D en portant au compas les longueurs FB = FE = FK et FC = FD = FH .