

Sur un modèle cinétique de croissance des bulles dans un magma visqueux

Louis Forestier-Coste¹
F. James¹, S.Mancini¹, A.Burgisser²

¹MAPMO, Université d'Orléans

²ISTO, CNRS Orléans Institut des Sciences de la Terre d'Orléans

CANUM, 2012





explosif



effusif

- Croissance de bulles de gaz dans le conduit.
- Croissance par décompression, exsolution et coalescence.
- Dégazage.

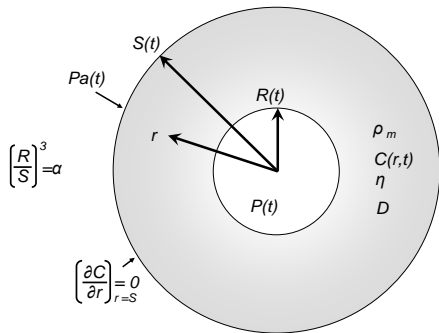
- Transport-coalescence^[1] : $\partial_t f + \nabla_x (af) = \zeta Q(f)$
fonctions $f(x, t)$ et taux de croissance $a(x, t)$

$$Q(f) = \frac{1}{2} \int_0^x H(x - x', x', t) f(x', t) f(x - x', t) dx' - \\ - \int_0^\infty H(x, x', t) f(x', t) f(x, t) dx'$$

- Croissance par décompression et exsolution :
 $\partial_t f + \partial_v(\Phi f) + \partial_m(\Xi f) = 0$

[1] S. Lovejoy, H. Goanac'h, D. Schertzer. J. Geophys. Res. (2004)

Problème physique : cas monodisperse^[2]



- monodisperse
- inconnues : R , P , C
- constante $S_0^3 = S^3 - R^3$
- $P_a(t) = 1 - t$
- $\Theta_V = \frac{4\eta_i \dot{P}_a}{P_i^2}$
- $\Theta_D = \frac{R_i^2 \dot{P}_a}{D_i P_i}$

[2] N.G. Lensky, O. Navon, V. Lyakhovsky. J. Vol. Geoth. Res. (2004)

équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R}{\Theta_V \eta} \left(P - P_a - \frac{\Sigma}{R} \right) \quad (0)$$



volume : $v = R^3$

masse : $m = PR^3$

taux de croissance en volume

$$\Phi(t, v, m) = \frac{3}{\Theta_V \eta} \left(m - vP_a - \Sigma v^{2/3} \right) \quad (1)$$

bilan de masse d'eau

$$\frac{d}{dt} (PR^3) = \frac{3\rho_m}{\Theta_D} \left(r^2 D \frac{\partial C}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (2)$$



volume : $v = R^3$, masse : $m = PR^3$

taux de croissance en masse

$$\Xi(t, v, m) = \frac{3\rho_m}{\Theta_D} F(t, v, m) \quad (3)$$

$$F(t, v, m) = \left(r^2 D \frac{\partial C}{\partial r} \right)_{r=v^{1/3}}$$

équation de diffusion advection

$$r^2 \frac{dC}{dt} = \frac{1}{\Theta_D} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D \frac{\partial C}{\partial r} \right) \quad (4)$$

$$C_R = C_H \sqrt{P} \quad \text{et} \quad \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=S} = 0$$



volume : $v = R^3$, masse : $m = PR^3$

flux de Green

$$F_G(t, v, m) = \Theta_D \frac{A(t) C_H \frac{\Phi(t, v, m) m}{v} + 2B(t) \sqrt{mv}}{2\Theta_D \sqrt{mv} + 3\rho_m A(t) C_H} \quad (5)$$

flux de Green

$$F_G(t, R) = \Theta_D \frac{AC_H \frac{\dot{V}M}{V} + 2B\sqrt{MV}}{2\Theta_D\sqrt{MV} + 3\rho_m AC_H}$$

$$M = PR^3, V = R^3$$

$$A = \left(\frac{R}{S-R} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m B_m C_m \hat{I}_m(t) \right) \text{ et } B = \left(\frac{R}{S-R} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m B_m C_m I_m^0(t, R) \right)$$

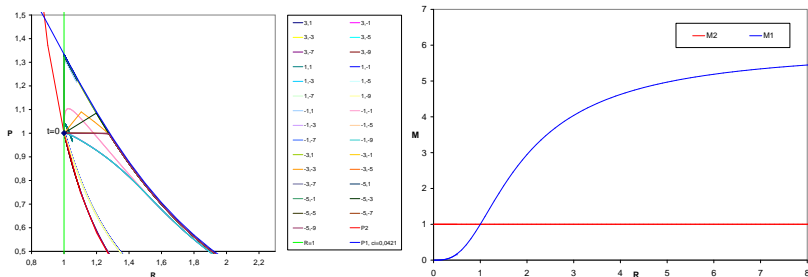
$$\hat{I}_m(t) = \frac{1 - \exp(-\beta_m^2 / (\Theta_D (S-R)^2) t)}{\beta_m^2 / (\Theta_D (S-R)^2)}$$

$$I_m^0(t, r) = \left(C(t_0, r) - C_H \sqrt{P(t_0)} \right) \exp \left[-t \frac{\beta_m^2}{\Theta_D (S-R)^2} \right]$$

$$C_m = \frac{2}{\beta_m} R, B_m = \frac{\beta_m^2 + H_2^2}{\beta_m^2 + H_2^2 + H_2}, \beta_m \cot \beta_m = -H_2 \text{ et } H_2 = \frac{R}{S} - 1$$

[3] K.D. Cole, J.V. Beck, A. Haji-Sheik, B. Litkouhi. Heat Conduction Using Green's Functions. (2011)

Autre approche



Solutions bornées par les courbes limites $\Theta_D \rightarrow 0$ et $\Theta_D \rightarrow \infty$

$$\Theta_D = \infty \Rightarrow M_2(R) = P(0)$$

$$\Theta_D = 0 \Rightarrow M_1(R) = \frac{\left(-Y C_H + \sqrt{Y(C_H^2 Y + 4R^3 C_0)}\right)^2}{4R^3} \text{ avec}$$

$$Y = \rho_m S_0^3.$$

$\Theta_V = 0 \Rightarrow M_3(R) = P_a(t)R^3 + \Sigma R^2$ attractrice pour R

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{R^2 \Theta_V \eta} (M - M_3(R))$$

On veut M_1 attractrice. On veut aussi $\lim_{\Theta_D \rightarrow \infty} M = M_2$ et

$$\lim_{\Theta_D \rightarrow 0} M = M_1$$

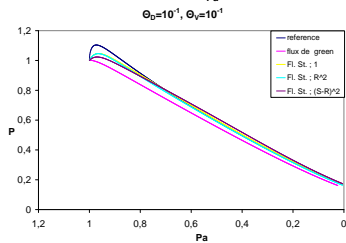
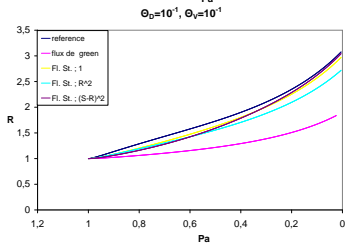
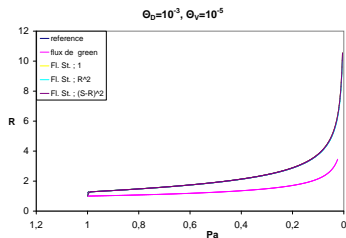
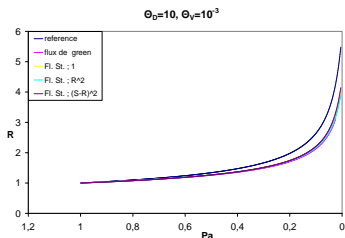
$$\frac{dM}{dt} = \frac{A}{\Theta_D} (M_1(R) - M)$$

↓

$$F(t, v, m) = \frac{A}{3\rho_m} \left(\frac{\left(-Y C_H + \sqrt{Y(C_H^2 Y + 4v C_0)} \right)^2}{4v} - m \right) \quad (6)$$

avec $Y = \rho_m S_0^3$ constante et A une inconnue.

Comparaison des flux



"Fl. St.; XXX" $\Rightarrow A=1/XXX$

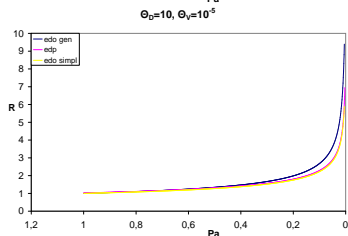
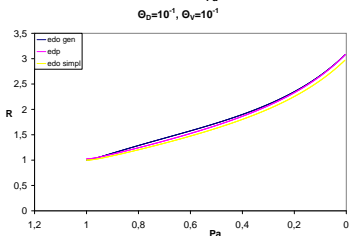
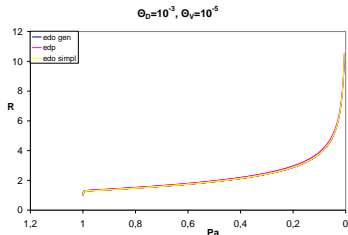
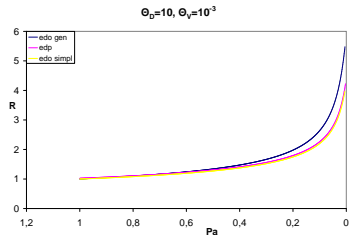
$$\partial_t f + \partial_v(\Phi f) + \partial_m(\Xi f) = \zeta Q(f) \quad (7)$$

splitting temporel :

- résolution numérique de $\partial_t f = \zeta Q(f)$ par volumes finis, présentée à SMAI 2011 et dans [4].
Conservation du moment d'ordre 1 discret.
Maillage non-uniforme.
- résolution numérique de $\partial_t f + \partial_v(\Phi f) + \partial_m(\Xi f) = 0$ en implicite, par différences finies et splitting directionnel.
Conservation du moment d'ordre 0 discret.
- Conditions aux bords libres.

[4] L. Forestier-Coste and S. Mancini. (soumis)

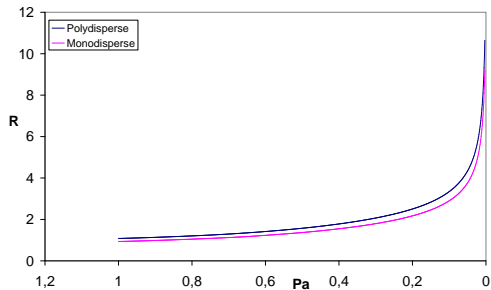
Monodisperse/Cinétique



"edo" : modèle monodisperse

"edp" : modèle cinétique

Population monodisperse/Polydisperse



Erreur sur le volume moyen initial due à la discrétisation.

On pose $x = (v, m)$ et $x' = (v', m')$:

$$H(x, x', t) = \frac{(\Psi + \Psi')_+}{\epsilon((v)^{(1/3)} + (v')^{(1/3)})} \frac{\sqrt{z_f}}{(\sqrt{z_0} - \sqrt{z_f})_+}$$

avec

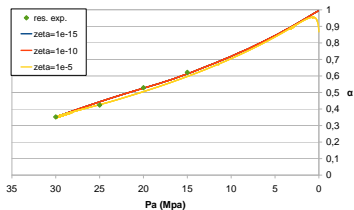
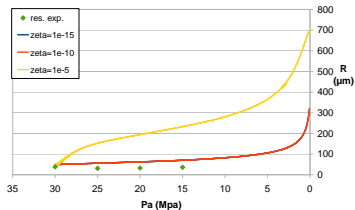
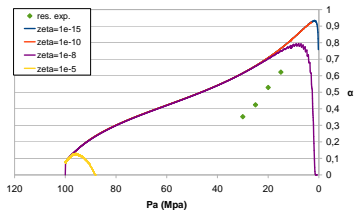
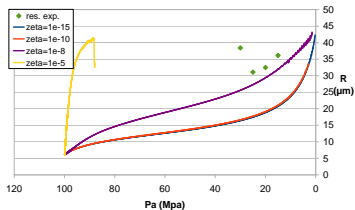
$$\Psi = \frac{1}{\Theta_{V\eta}} \left(\frac{m}{v^{2/3}} - v^{1/3}(1-t) - \Sigma \right)$$

$$z_0 = (v^{1/3} + (v')^{1/3}) \left[\left(\frac{1}{\alpha(t)} \right)^{1/3} - 1 \right]$$

où $\epsilon = 0.5$ et $z_f = 5 \cdot 10^{-7}$

[5] J.M. Castro, A. Burgisser, I. Shipper, S. Mancini. *Bulletin of Volcanology*. en préparation.

Application à la volcanologie



Conclusions

- approximation du flux satisfaisante
- nouveau modèle cinétique
- application volcanologique

Perspectives

- affiner le flux approché
- validation expériences 2D et détermination de ζ .
- prendre en compte d'autres phénomènes.