UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2008-2009**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **S. Grellier en grève ! !**

Semaine 22 - Exercices Analyse.

(1) Construire la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{t}{t^2-1} \\ y(t) &= \frac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

Déterminer ensuite les coordonnées du point double I et montrer que les tangentes en I sont orthogonales.

(2) Étudier au voisinage du point de paramètre $t = 0$, la forme des courbes définies paramètriquement par

$$\begin{cases} x(t) &= t^4 \\ y(t) &= t^2 - t^5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) &= \ln(t+1) - t \\ y(t) &= e^t - t - \frac{t^2}{2}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) &= \sin 3t \\ y(t) &= \cos 2t. \end{cases}$$

(3) Étudier et représenter graphiquement les courbes définies paramètriquement par

$$\begin{cases} x(t) = & \frac{1}{3}(2\cos t + \cos(2t)) \\ y(t) = & \frac{1}{3}(2\sin t - \sin(2t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = & t^2 + \frac{3}{4}t^4 - \ln(t) \\ y(t) = & \frac{(1+t^2)^2}{t} \end{cases}$$

(4) *Extrait Capes 91*. Pour toutes fonctions f, g appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, on définit la fonction $f * g$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ par

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

(a) Montrer que la loi $*$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$. On admet que la loi $*$ ainsi définie est commutative et associative. On suppose, dans les questions qui suivent, que f et g sont deux fonctions appartenant $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ à valeurs positives ou nulles dont les intégrales impropres sur $\mathbb{R}_+$ sont convergentes.

(b) Montrer que pour tout réel R strictement positif, on a :

$$\int_0^R f * g(x)dx = \int_0^R g(t) \int_0^{R-t} f(x)dxdt.$$

(c) Montrer que pour tout réel R strictement positif, on a :

$$\int_0^{R/2} f(x)dx \int_0^{R/2} g(t)dt \leq \int_0^R f * g(x)dx \leq \int_0^R f(x)dx \int_0^R g(t)dt.$$

(d) Déduire de ce qui précède que l'intégrale impropre de $f * g$ sur $\mathbb{R}_+$ est convergente et que

$$\int_0^\infty f * g(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty g(t)dt.$$

(e) Pour tout réel λ strictement positif, on désigne par f_λ la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R}_+;\ f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. On définit la suite $(f_\lambda^{*n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ des puissances de convolution de la fonction f_λ par $f_\lambda^{*1} = f_\lambda$ et pour tout entier non nul $f_\lambda^{*(n+1)} = f_\lambda^{*n} * f_\lambda$.

(f) Calculer f_λ^{*2}.

(g) Calculer f_λ^{*n} pour tout entier naturel non nul n.