

Fonctions exponentielles.

1 - Equation fonctionnelle des fonctions exponentielles.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(E) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y).$$

1) a) Que peut-on dire de $f(0)$?

b) Montrer que :

(i) si f s'annule en un point, elle s'annule partout,

(ii) si f ne s'annule pas, elle est à valeurs > 0 .

2) Montrer l'équivalence entre (a), (b) et (c) :

(a) f est continue en un point

(b) f est continue sur \mathbb{R}

(c) f est monotone.

3) Soit f et g des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant l'équation fonctionnelle (E).

On suppose l'existence de $x_0 \neq 0$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$, montrer que $f = g$.

4) On suppose f continue sur \mathbb{R} . En considérant l'intégrale $\int_0^1 f(x+y)dy$, montrer que f est dérivable.

2 - Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} .

3 - Montrer que pour tout $x > 0$

$$e^{\frac{x}{x+1}} < x + 1 < e^x$$

4 - Discuter l'équation $2^x + 3^x = 4^x$ (où $x \in \mathbb{R}$).

5 - Etudier les fonctions $f : x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$, $f : x \mapsto xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$

6 - Etudier la suite définie par $u_0 \neq 0$ et $u_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{u_n}-1}{u_n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

7 - Soit x un réel.

- 1) En utilisant les fonctions logarithme et exponentielle, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.
- 2)a) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est convergente.
- b) Montrer que pour $n > p$ entiers

$$\left| \sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| \leq \sum_{k=0}^p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{p+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!}.$$

En déduire (sans utiliser le 1) que la suite de terme général $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

8 - Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

- 1) Montrer que pour tout entier n , P_{2n} est à valeurs > 0 et P_{2n+1} admet une unique racine $x_n < 0$.
- 2) Montrer que pour tout n , $x_n \geq -2n - 1$, la suite (x_n) est décroissante et tend vers $-\infty$.