

Continuité, fonction réciproque.

- 1 - Pour quelles valeurs des réels α, β la fonction $x \mapsto \alpha x + \beta|x|$ est-elle injective? Quelle est alors son image?
- 2 - Discuter le nombre de solutions (x, y) (avec $x > 0, y > 0$) de l'équation $x^y = y^x$.
- 3 - Soient α et β des fonctions continues de \mathbb{R} dans lui-même, telles que $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t)^2 - \beta(t) > 0$. Déterminer les fonctions continues $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout réel $t, \varphi(t)$ soit racine de l'équation

$$x^2 - 2\alpha(t)x + \beta(t) = 0.$$

- 4 - Étudier la fonction qui à y associe la plus petite racine de l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = y.$$

(Domaine de définition, continuité, variations, limites aux bornes du domaine, dérivabilité).

- 5 - a) Pour quelles valeurs de y , l'équation $x^4 + 4x = y^4 + 4y$ admet-elle une racine $x \neq y$?
Montrer qu'alors x est unique.
b) Étudier la fonction f qui au réel y associe le réel x ainsi défini.
- 6 - Montrer que pour tout réel x il existe un seul réel y tel que $y - \sin y = 3 \sin x(1 - \cos x)$.
Étudier la fonction f qui au réel x associe le réel y ainsi défini.
- 7 - Que peut-on dire d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$?
- 8 - Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue ($a < b$). Montrer que f admet un point fixe (i.e. un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$).
- 9 - Montrer que les parties convexes de \mathbb{R} sont les intervalles de \mathbb{R} .
- 10 - Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
1) Montrer que (f strictement monotone $\implies f$ injective).

2) On suppose f injective et $f(a) < f(b)$ où $a, b \in I, a < b$. Montrer que f est strictement croissante.

11 - La fonction f définie par, $f(0) = 0, f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, est-elle continue? Montrer que l'image par f d'un intervalle de \mathbb{R} est un intervalle.

12 - Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone telle que l'image par f de tout intervalle de \mathbb{R} est un intervalle. Montrer que f est continue.

13 - Soit f une application continue bijective de $[0, 1]$ sur lui-même.

a) Montrer que $f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$.

b) On suppose que f est involutive (telle que $f^2 = I_d$). Montrer que si $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, alors $f(x) = x$ pour tout x de $[0, 1]$ (f est l'identité).

14 - Soit n un entier ≥ 2 et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout réel x ,

$$f^n(x) = f \circ \dots \circ f(x) = -x \quad (f \text{ composée } n \text{ fois}).$$

a) Montrer que f est bijective.

b) Montrer que f est strictement décroissante et que n est impair.

c) Montrer que f est impaire.

d) Montrer que pour tout réel $x, f(x) = -x$.

15 - On se propose de déterminer les fonctions dérivables $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telles que $f \circ f = f$.

a) Montrer que l'ensemble, $\{x \in [0, 1] / f(x) = x\}$, des points fixes de f est un intervalle $[a, b]$ (où $0 \leq a \leq b \leq 1$).

Indication : comparer l'ensemble des points fixes de f et $f([0, 1])$.

b) Si f n'est pas constante, montrer que pour tout $x \in [0, 1], f(x) = x$. (On pourra étudier la dérivabilité de f en a et b).