

Homothéties, translations.

- 1 - Montrer que toute application du plan affine dans lui-même qui transforme toute droite affine en une droite parallèle est une homothétie ou une translation.
- 2 - Soit ABC un triangle; α, β, γ des réels tels que $\alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$. Que dire de l'application du plan affine dans lui-même, qui à tout point M associe le point M' défini par $M' = \text{bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (M, 1))$?
- 3 - Quelle est l'image d'un segment $[AB]$ par une homothétie h ? Que peut-on dire des homothéties transformant un segment $[AB]$ en un segment $[A'B']$ donnés?
- 4 - Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. Les droites (AD) et (BC) se coupent en U , les droites (AC) et (BD) se coupent en V . Montrer que U, V, I, J sont alignés.
- 5 - Dans le plan affine, donner une construction, à la règle seule, de la droite passant par un point donné P et parallèle à un segment $[AB]$ dont on connaît le milieu I .
- 6 - Dans le plan affine on donne un parallélogramme non plat $ABCD$. Montrer qu'on peut construire à la règle seule le milieu d'un segment $[PQ]$.
- 7 - Soit A un point et Δ une droite du plan. Lieu du milieu I de $[MA]$ lorsque M décrit la droite Δ ? Lorsque M décrit un cercle donné Γ ?
- 8 - *La droite d'Euler.*
Soit ABC un triangle, G son isobarycentre, H l'orthocentre, O le centre du cercle circonscrit. Montrer que O, G, H sont alignés et que $\vec{GO} = -\frac{1}{2}\vec{GH}$.
- 9 - Soit $ABCD$ et $MNPQ$ des parallélogrammes tels que M, N, P, Q appartiennent respectivement aux droites $(AB), (BC), (CD), (DA)$. Montrer qu'ils ont le même centre.
- 10 - Soit ABC un vrai triangle, A', B', C' des points situés respectivement sur les droites $(BC), (CA), (AB)$ et distincts respectivement de C, A, B .

a) *Théorème de Ménélaüs.*

Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

b) *Théorème de Ceva.*

Montrer que les droites (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

11 - Théorème de Pappus. Soit Δ et Δ' deux droites distinctes d'un plan affine, A, B, C trois points distincts sur Δ et A', B', C' trois points distincts sur Δ' (distincts de l'éventuel point d'intersection de Δ et Δ'). Montrer que si (AB') est parallèle à (BA') et (BC') parallèle à (CB') , alors (CA') est parallèle à (AC') .

12 - Théorème de Desargues.

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$ et tels que les droites (AB) , (BC) , (CA) soient respectivement parallèles aux droites $(A'B')$, $(B'C')$, $(C'A')$. Montrer que les droites (AA') (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

13 - Soit $ABCD$ un quadrilatère. La parallèle à (BC) en A coupe (BD) en I , et la parallèle à (AD) en B coupe (AC) en J . Montrer que (IJ) est parallèle à (CD) .