

Limites continuité.

---

1 - Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x + x^2}.$$

2 - Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  admettant des limites en  $x_0$ . Montrer que les fonctions  $\sup(f, g)$  et  $\inf(f, g)$  admettent des limites en  $x_0$ .

3 - Etudier la continuité de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto (x - [x])^2 + [x]$  (où  $[ \ ]$  désigne la partie entière).

4 - Etudier, selon les valeurs du réel  $\alpha$ , la limite en 0 de la fonction  $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^\alpha [\frac{1}{x}]$ .

5 - On suppose que  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  un réel tel que  $A \cup \{a\}$  soit un intervalle. Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

1) Si  $f$  admet pour limite  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$  montrer que, pour toute suite  $(u_n)$  dans  $A$  convergeant vers  $a$ , la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $\ell$ .

2) Réciproquement, montrer que si pour toute suite  $(u_n)$  dans  $A$  convergeant vers  $a$  la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $\ell$ , alors  $f$  tend  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

Que peut-on dire si  $a \in A$ ?

3) Montrer que  $f$  admet une limite quand  $x$  tend vers  $a$  si et seulement si, pour toute suite  $(u_n)$  dans  $A$  convergeant vers  $a$ , la suite  $(f(u_n))$  est convergente.

6 - Etudier la limite en 0 des fonctions  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ ,  $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ .

7 - Etudier la continuité de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x$  si  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $f(x) = 0$  si  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

8 - Etudier la continuité de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \inf_{n \in \mathbb{N}^*} |x - \frac{1}{n}|$ . Plus généralement, si  $E$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$ , étudier la continuité de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \inf_{y \in E} |x - y|$ .

9 - Soit  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par,  $f(x) = 0$  si  $x$  est irrationnel, et  $f(x) = \frac{1}{q}$  si  $x = \frac{p}{q}$  est rationnel et  $\frac{p}{q}$  est la fraction irréductible représentant  $x$ .

- a) Soit  $\varepsilon > 0$ , montrer que l'ensemble  $E_\varepsilon = \{x \in ]0, 1[ / f(x) \geq \varepsilon\}$  est fini.  
b) Montrer que  $f$  est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.

**10 -** a) Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante et majorée. Montrer que  $f$  admet une limite en  $+\infty$ . Que peut-on dire si  $f$  n'est pas majorée?

b) Soit  $f$  une fonction croissante définie sur un intervalle ouvert non vide  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'elle admet en tout point une limite à droite et à gauche. Limites en  $a$  et  $b$ ?

**11 -** Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ , croissante telle que la fonction  $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  soit décroissante. Montrer que  $f$  est continue.

**12 - Critère de Cauchy.** On suppose que  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  un réel tel que  $A \cup \{a\}$  soit un intervalle. Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Montrer que  $f$  admet une limite quand  $x$  tend vers  $a$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \forall y \in A, ((|x - a| < \eta \text{ et } |y - a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon))$$