

Polynômes.

- 1 - Pour quelles valeurs de  $n \in \mathbb{N}^*$  le polynôme  $X^{2n} + X^n + 1$  est-il divisible par  $X^2 + X + 1$ ? Est-il divisible par  $(X^2 + X + 1)^2$ ?
- 2 - Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on suppose que le reste de la division euclidienne dans  $\mathbb{R}[X]$  de  $P$  par  $(X - 1)$  (resp.  $(X - 2)$ ) est 1 (resp. 2). Déterminer le reste de la division euclidienne dans  $\mathbb{R}[X]$  de  $P$  par  $(X - 1)(X - 2)$ .
- 3 - Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer le reste de la division euclidienne de  $(X \sin \theta + \cos \theta)^n$  par  $X^2 + 1$ .
- 4 - Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  divisibles par leur polynôme dérivé  $P'$ .
- 5 - Montrer que le polynôme  $6X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 1$  admet des racines rationnelles et les déterminer. En déduire sa décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- 6 - Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $n = pq + r$  avec  $0 \leq r < p$  (division euclidienne de  $n$  par  $p$ ), et soit  $a \in \mathbb{C}$ .  
 a) Montrer que le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^p - a$  est  $a^q X^r$ .  
 b) Montrer que le reste de la division euclidienne de  $X^n - a^n$  par  $X^p - a^p$  est  $a^{pq}(X^r - a^r)$ .  
 c) Soit  $d = n \wedge p$  le pgcd de  $n$  et  $p$ . Montrer que le pgcd des polynômes  $X^n - a^n$  et  $X^p - a^p$  est  $X^d - a^d$ .
- 7 - Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ , et  $(P_i)_{i \in I}$  une famille de polynômes non nuls de  $\mathbb{K}[X]$ . On suppose que l'application  $I \rightarrow \mathbb{N}, i \mapsto \deg(P_i)$  est injective. Montrer que  $(P_i)_{i \in I}$  est une famille libre de  $\mathbb{K}[X]$ . Même question en remplaçant le degré par la valuation.
- 8 - *Polynômes de Lagrange.* Soient  $a_0, \dots, a_n$  des nombres complexes deux à deux distincts. Pour  $0 \leq k \leq n$ , on pose

$$P_k(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \left( \frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right).$$

- a) Montrer que les polynômes  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  sont indépendants (calculer  $P_k(a_j)$ ).  
 b) Montrer que pour tout  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  tel que  $P(a_j) = \alpha_k$  pour tout  $j$ ,  $0 \leq j \leq n$ .

**9 - Polynômes de Tchebychev.**

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  il existe un unique polynôme  $T_n \in \mathbb{R}[X]$ , de degré  $n$  tel que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

b) Déterminer  $T_1, T_2, T_3$ .

c) Montrer que le coefficient de plus haut degré de  $T_n$  est  $2^{n-1}$ .

d) Montrer que les racines de  $T_n$  sont les réels  $x_i = \cos \frac{2i+1}{2n}\pi$ , ( $0 \leq i \leq n-1$ ).

**10 -** a) Déterminer les racines du polynôme  $P_n = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$ .

b) Calculer  $\prod_{0 \leq k \leq n} (1 + \cotan^2(\frac{k\pi}{2n+1}))$ .

**11 -** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ . Montrer qu'il existe des polynômes  $A$  et  $B$  à coefficients réels tels que  $P = A^2 + B^2$ .

**12 -** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant  $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ .

1) Que peut-on dire si  $P$  est un polynôme constant?

2) On suppose que  $P$  est de degré  $\geq 1$ , soit  $\alpha$  un zéro de  $P$ .

a) Montrer que  $\alpha^2$  et  $(\alpha-1)^2$  sont des zéros de  $P$ .

b) Montrer que les suites  $(\alpha^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $((\alpha-1)^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  ne sont pas injectives. En déduire que  $\alpha \in \{0, 1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$ .

3) Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant  $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ .

**13 -** Pour  $k \in \mathbb{N}$  on considère les polynômes définis par

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} \quad \text{si } k \geq 1.$$

1) Montrer que  $(P_k)$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$ .

2) Calculer  $P_k(x)$  pour  $x \in \mathbb{Z}$ .

3) Pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on pose  $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ . Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ . Calculer  $\Delta(P_k)$ .

4) Montrer que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $\leq n$ , on a  $P = \sum_{k=0}^n \Delta^k(0)P_k$ .

5) En déduire une caractérisation des polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ .