Recherche d'extremums.

---

1 - Déterminer les extremums des fonctions

$$\sqrt{|x(x-1)|} \quad , \quad \sqrt{x^2|x-1|} \quad , \quad |x^3+1| \quad , \quad \sqrt{|x^4-1|} \, .$$

2 - Si x et $y \in \mathbb{R}$, déterminer $\sup\limits_{t\in[0,1]} |tx+(1-t)y|$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x\cos t + y\sin t|$.

3 - Déterminer les extremums des fonctions définies par

$$(1)\ \ f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad , \quad (2)\ \ f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad , \quad (3)\ \ f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$(4)\ \ f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{pour } x \in]0,1[$$

4 - Déterminer les extremums de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2} + x\ln x$.

5 - Déterminer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^*} \dfrac{\sin x}{x}$ et $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^*} \dfrac{\sin x}{x}$.

6 - Déterminer les extremums des fonctions $x \mapsto x + \sin^2 x$ et $x \mapsto \sqrt{|x|} + \sin^2 x$. Montrer que leurs dérivées s'annulent une infinité de fois.

7 - Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et $x_0 \in]a,b[$.
1) Montrer que si f admet un minimum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geq 0$.
2) Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors f admet un minimum local en x_0.
3) Que peut-on dire si $f''(x_0) = 0$?
4) Si f'' est positive sur $[a,b]$, que peut-on dire du maximum de f sur $[a,b]$?

8 - 1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f atteint son maximum en $t_0 \in]a,b[$, montrer que si la limite $\ell = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h^2}(f(t_0+h) + f(t_0-h) - 2f(t_0))$ existe, alors $\ell \leq 0$.

2) On suppose que f est une fonction continue sur $[a,b]$ telle que pour tout $t \in [a,b]$ la limite $\ell(f)(t) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h^2}(f(t+h)+f(t-h)-2f(t))$ existe, et la fonction $t \mapsto \ell(f)(t)$ est continue.
a) Montrer que si f est deux fois dérivable sur $[a,b]$, elle satisfait à la condition de l'énoncé et calculer $\ell(f)$. Cas de $f : t \mapsto t^2$?
b) Montrer que si $\ell(f)(t) > 0$ pour tout $t \in]a,b[$, alors f atteint son maximum en a ou b. En déduire que si $f(a) = f(b) = 0$ et $\ell(f)(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$, alors $f = 0$.
c) Montrer que f est deux fois dérivable sur $[a,b]$ et $\ell(f) = f''$.

9 - Pour tout entier $n \geq 0$ et x réel on pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Montrer que P_{2n} admet un minimum atteint en un unique point a_n. Limites de (a_n) et $(P_{2n}(a_n))$ quand n tend vers l'infini?

10 - Déterminer le maximum de $f : (x,y) \mapsto \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

11 - Montrer que si x_1, x_2, x_3 sont > 0,

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_1+x_3} + \frac{x_3}{x_1+x_2} \geq \frac{3}{2}\,.$$

12 - Soit $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des dérivées partielles d'ordre deux $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sur $]0,1[\times]0,1[$. On pose $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
1) On suppose que f admet un maximum local en $(x_0,y_0) \in]0,1[\times]0,1[$, montrer que $\Delta f(x_0,y_0) \leq 0$.
2) Montrer que si $\Delta f \geq 0$ sur $]0,1[\times]0,1[$, alors le maximum de f est atteint sur l'un des côtés du carré $[0,1]\times[0,1]$.
3) Si $\Delta f = 0$ sur $]0,1[\times]0,1[$ et si f est nulle sur les côtés du carré $[0,1]\times[0,1]$, montrer que f est nulle.