

**Produit vectoriel.**

- 1 - Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $E$ .  
 a) Montrer que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \quad (\text{identité de Lagrange})$$

- b) En déduire que si  $a, b, c, a', b', c'$  sont des réels,

$$(ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (aa' + bb' + cc')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2).$$

- 2 - Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls de  $E$ . On considère l'équation (E):

$$\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$$

- 1) Montrer que si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas orthogonaux, l'équation n'a pas de solution.  
 2) On suppose maintenant que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.  
 a) Etudier le cas  $\vec{u} = \vec{0}$ .  
 b) Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , déterminer une solution  $\vec{x}_0$  telle que  $\vec{x}_0 \perp \vec{u}$ . En déduire l'ensemble des solutions de (E).

- 3 - Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois,  $\vec{k}$  un vecteur unitaire de  $E$ ,  $\Pi$  le plan orthogonal à  $\vec{k}$  orienté par  $\vec{k}$ .

1) Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\Pi$  tels que  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$  et soit  $\theta$  la mesure de l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$ . Montrer que  $\vec{v} = \vec{u} \cos \theta + \sin \theta (\vec{u} \wedge \vec{k})$ .

2) Soit  $\theta$  un réel n'appartenant pas à  $2\pi\mathbb{Z}$ , et  $f$  la rotation (vectorielle) d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{k}$ .

- a) Montrer que la projection orthogonale de  $\vec{u}$  sur  $\mathbb{R}\vec{k}$  est  $(\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}$ .  
 b) En déduire que pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $E$ ,

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \cos \theta + \sin \theta (\vec{u} \wedge \vec{k}) + (1 - \cos \theta)(\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

3) *Application.* Soit  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base orthonormée directe de  $E$ , déterminer la matrice, dans cette base, de la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  autour de  $\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ .

- 4 - Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois,  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  trois vecteurs de  $E$ . En exprimant les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  dans une base orthonormée convenable, montrer la formule de Gibbs du "double produit vectoriel":

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}.$$

- 5 - Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois, et  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  une base de  $E$ .  
 On pose  $\vec{u} = \vec{b} \wedge \vec{c}$ ,  $\vec{v} = \vec{c} \wedge \vec{a}$ ,  $\vec{w} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ .  
 a) Déterminer les vecteurs  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ,  $\vec{v} \wedge \vec{w}$ ,  $\vec{w} \wedge \vec{u}$ .  
 b) Montrer que  $(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{w} \wedge \vec{u})$  est une base directe de  $E$ .

- 6 - Soit  $E$  l'espace affine euclidien orienté de dimension trois. On considère deux droites non coplanaires  $D$  et  $D'$  de repères respectifs  $(A, \vec{u})$  et  $(A', \vec{u}')$ .

1) a) Soit  $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$ . Montrer que les plans  $P$  et  $P'$  de repère respectifs  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  et  $(A', \vec{u}', \vec{v})$  sont sécants suivant une droite  $\Delta$  perpendiculaire à  $D$  et  $D'$ .

Montrer que  $\Delta$  est la seule droite perpendiculaire à  $D$  et  $D'$ .

b) On désigne par  $H$  et  $H'$  les intersections de  $\Delta$  avec  $D$  et  $D'$ . Montrer que  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AA'} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{HH'}$ .  
 En déduire que la distance  $d = HH'$  de  $D$  à  $D'$  s'exprime par (où  $[ , , ]$  désigne le produit mixte).

$$d = \frac{|(\vec{u} \wedge \vec{u}') \cdot \overrightarrow{AA'}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|} = \frac{|[\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

- 7 - Soit  $\mathcal{E}$  l'espace affine euclidien orienté de dimension trois,  $E$  l'espace vectoriel associé, et  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé direct de  $\mathcal{E}$ .

1) Soient  $A, B$  et  $C$  trois points de  $\mathcal{E}$  de coordonnées,  $A(1, 1, -1)$ ,  $B(1, 0, 1)$ ,  $C(2, 1, 1)$ . Déterminer  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ , en déduire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

2) Soient  $A, B$  et  $C$  trois points de  $\mathcal{E}$  de coordonnées,  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(4, 0, 1)$ ,  $C(1, 3, -2)$ .  
 Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

4) a) Soit  $ABCD$  un tétraèdre. Montrer que la hauteur issue de  $D$  a pour longueur

$$h = \frac{|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

En déduire que le volume  $V$  du tétraèdre est

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$$

b) Montrer que le volume d'un parallélépipède  $ABCDEFGH$  est

$$V = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}| = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]|$$

- 8 - Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois.

1) Soit  $\vec{w} \in E$ ,  $\vec{w} \neq \vec{0}$ .

a) Montrer que l'application  $f : \vec{x} \mapsto \vec{w} \wedge \vec{x}$  est un endomorphisme antisymétrique de  $E$ . (Ce qui signifie que:  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \vec{x} \cdot f(\vec{y}) = -f(\vec{x}) \cdot \vec{y}$ ).

b) Déterminer la matrice de  $f$  dans une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  telle que  $\vec{w} = \|\vec{w}\| \vec{k}$ , ainsi que son image et son noyau.

c) Montrer que l'application  $p : E \rightarrow E$  définie par  $p(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{w} \cdot \vec{x})}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w}$  est une projection orthogonale dont on précisera le noyau et l'image.

d) Montrer que  $f \circ f = -\|\vec{w}\|^2 p$ . En déduire que  $\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{x}) = -\|\vec{w}\|^2 \vec{x} + (\vec{w} \cdot \vec{x}) \vec{w}$ .

2) Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  trois vecteurs de  $E$ . Montrer qu'il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $\vec{v}_1, \vec{w}_1 \in E$  tels que  $\vec{v} = \lambda \vec{u} + \vec{v}_1$ ,  $\vec{w} = \mu \vec{u} + \vec{w}_1$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = \vec{u} \cdot \vec{w}_1 = 0$ . En déduire la formule du "double produit vectoriel":

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}.$$

3) Soit  $f$  un endomorphisme antisymétrique de  $E$ .

a) Que peut-on dire de la matrice de  $f$  dans une base orthonormée?

b) Montrer qu'il existe un vecteur  $\vec{w} \in E$  tel que pour tout  $\vec{x} \in E$ ,  $f(\vec{x}) = \vec{w} \wedge \vec{x}$ .