Théorème de Thalès.

---

1 - Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan, montrer que les milieux I, J, K, L des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

2 - soit A, B, C, D des points d'un plan affine euclidien, on pose $AB = x$, $CD = y$. Construire un segment du plan de longueur xy.

3 - Soit ABC un vrai triangle, A', B', C' des points situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB) et distincts des sommets A, B, C.
a) On suppose A', B', C' alignés, en utilisant la droite parallèle a $(A'B')$ en B , montrer la relation de *Ménélaüs* :
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \ .$$
Montrer la réciproque.
b) *Théorème de Ceva.*
Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \ .$$

4 - Soit $ABCD$ un quadrilatère plan, E l'intersection de (BD) avec la parallèle en A à (BC) , F l'intersection de (AC) avec la parallèle en B à (AD). Montrer que (EF) est parallèle à (CD).

5 - Soit ABC un triangle non plat. On désigne par A' le symétrique de B par rapport à C, par B' le symétrique de C par rapport à A, par C' le symétrique de A par rapport à B.
a) Soit P le point d'intersection de $(A'C')$et (AC), P' le point d'intersection de $(A'C')$ et de la parallèle en B à (AC). Comparer $\overline{A'P}$, $\overline{PP'}$, $\overline{P'C'}$.
b) Indiquer une construction de ABC connaissant $A'B'C'$.

6 - Soit $ABCDA'B'C'D'$ un parallélépipède de l'espace ($ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont des parallélogrammes, $A'B'C'D'$ est translaté de $ABCD$ par $\overrightarrow{AA'}$).
a) Montrer que les plans (BDA') et $(CB'D')$ sont parallèles.
b) Ces deux plans coupent (AC') en I et J respectivement. Montrer que I est situé au tiers, et J au deux tiers de $[AC']$.
c) Montrer que I et J sont les isobarycentres respectifs de BDA' et $CB'D'$.

7 - *Théorème de Pappus.* Soit Δ et Δ' deux droites distinctes d'un plan affine, A, B, C trois points distincts sur Δ et A', B', C' trois points distincts sur Δ' (distincts de l'éventuel point d'intersection de Δ et Δ'). Montrer que si (AB') est parallèle à (BA') et (BC') parallèle à (CB'), alors (CA') est parallèle à (AC').

8 - *Théorème de Desargues.*
Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$ et tels que les droites (AB), (BC), (CA) soient respectivement parallèles aux droites $(A'B')$, $(B'C')$, $(C'A')$. Montrer que les droites (AA') (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

9 - Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles, A, B, C des points de $\mathcal{D}$, et A', B', C' des points de $\mathcal{D}'$. Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}\,.$$

10 - On appelle birapport de quatre points A, B, C, D distincts et alignés, le scalaire :

$$[A,B,C,D] := \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \Big/ \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}\,.$$

Soit Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 des droites concourantes ou parallèles du plan affine. Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ coupent respectivement les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 en A, B, C, D et en A', B', C', D'. Montrer que $[A,B,C,D] = [A',B',C',D']$.
Dans le cas où les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 sont concourantes en O, considérer la droite Δ parallèle en B à Δ_1 et les points d'intersection E de Δ et Δ_3, et F de Δ et Δ_4. A l'aide du thórème de Thalès, montrer que $[A,B,C,D] = \frac{\overline{FB}}{\overline{EB}}$.

11 - Soit Δ et Δ' deux droites du plan affine concourantes en un point O, et M un point du plan non situé sur ces droites. Montrer que l'ensemble des points M' du plan tels que la droite (MM') coupe Δ et Δ' en P et P' vérifiant $[M,M',P,P'] = -1$ est inclus dans une droite $\mathcal{D}_M$ passant par O (appelée polaire de M par rapport à Δ et Δ').