UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2006-2007**
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 10 - Comparaison de fonctions.

(1) Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I \subset]0,\infty[$ et soit a un point à l'intérieur de I. On suppose que $f \simeq g$ au point a.
  (a) On suppose que f et g tendent vers $l \neq 1$ au point a. Montrer alors que $\ln f \simeq \ln g$ au point a. Que peut-on dire lorsque $l = 1$?
  (b) Montrer que $e^f \simeq e^g$ au point a si et seulement si $\lim_a f - g = 0$.

(2) (a) Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = a$ avec $a \neq 0$. Montrer que $u_n \simeq na$ lorsque n tend vers l'infini.
  (b) Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$. Montrer que $u_n \simeq \frac{1}{n}$ (Indication: on pourra considérer la suite $v_n = 1/u_n$).

(3) Déterminer un équivalent de la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini.

(4) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution a_n dans l'intervalle $]n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. Chercher un équivalent de a_n puis de $d_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - a_n$ lorsque n tend vers l'infini.

(5) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note u_n l'unique solution dans $]0,\infty[$ del'équation

$$x^n - x - n = 0.$$

  (a) Montrer que u_n est bien définie et que $0 < u_n < 2$.
  (b) Justifier que $(u_n)^n \simeq n$.
  (c) En déduire un équivalent de $\ln(u_n)$ puis la limite de la suite (u_n).
  (d) Démontrer que $u_n - 1 \simeq \dfrac{\ln n}{n}$.

(6) Déterminer un équivalent simple de $\int_0^1 (\ln(1+x))^n dx$ lorsque n tend vers l'infini.

(7) Soient f et g deux fonctions à valeurs positives continues sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que les intégrales $\int_0^\infty f(x)dx$ et $\int_0^\infty g(x)dx$ sont de même nature et, si elles convergent, que

$$\int_t^\infty f(x)dx \simeq \int_t^\infty g(x)dx$$

lorsque t tend vers l'infini.

(8) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) \int_0^x f^2(t)dt = l > 0$. Déterminer un équivalent de f à l'infini.