

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1. Montrer que si deux entiers naturels a et b sont multiples de 7 alors $a^2 + b^2$ est divisible par 7. Etudier la réciproque.
2. Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ on a $17/(2m + 3n) \Leftrightarrow 17/(9m + 5n)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
 - (a) $2^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv 0 \pmod{5}$
 - (b) $2^{3n+4} + 3^{3n+1} \equiv 0 \pmod{19}$
 - (c) $10^{6n} + 10^{3n} \equiv 2 \pmod{111}$
 - (d) $4^n - 3n \equiv 1 \pmod{9}$
 - (e) $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0 \pmod{7}$
 - (f) $(n + 1)^n \equiv 1 \pmod{n^2}$
 - (g) $3^{3n+3} - 26n \equiv 27 \pmod{169}$.
4. Montrer que dans la suite $(2^n - 3)_{n \in \mathbb{N}}$ il existe une infinité de termes divisibles par 5, une infinité de termes divisibles par 13, mais aucun terme divisible par 65.
5. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :
 - (a) $3^n + 4n + 1 \equiv 0 \pmod{8}$
 - (b) $2^{2n} + 2^n \equiv -1 \pmod{21}$.
6. Résoudre
 - (a) $x^2 + x = \bar{6}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
 - (b) $x^2 - 2x + \bar{2} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
 - (c) $x^2 - 4x = \bar{9}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
 - (d) $x^2 - 4x = \bar{3}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
7. Montrer que les équations suivantes n'ont pas de solutions dans \mathbb{Z}^2 :
 - (a) $x^2 - 5y^2 = 3$
 - (b) $15x^2 - 7y^2 = 9$.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35}$ appartient à \mathbb{Z} .
9. Démontrer que pour tous entiers m et n non nuls, 56786730 divise $mn(m^{60} - n^{60})$.
10. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que :
$$\begin{cases} n \equiv 2 & (\text{mod } 7) \\ n \equiv 1 & (\text{mod } 8) \\ n \equiv 3 & (\text{mod } 9) \end{cases}$$
11. Montrer la réciproque suivante du petit théorème de Fermat :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ et $a^k \not\equiv 1 \pmod{n}$ pour $1 \leq k \leq n-1$, alors n est premier.