

Dérivabilité et fonctions dérivées ...

Exercice 1

Étudier la dérivabilité éventuelle en 0 des fonctions suivantes (avec leur ensemble de définition « naturel ») :

$$f : x \mapsto 1 + x + x\sqrt{x} \qquad g : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$$

Exercice 2 Étudier les prolongements continus éventuels, la continuité et la dérivabilité des fonctions définies sur \mathbf{R}^{+*} , par :

$$f(x) = x E\left(\frac{1}{x}\right) \qquad g(x) = x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)$$

où E désigne la fonction partie entière.

Exercice 3 La lettre f désigne une fonction dérivable sur \mathbf{R} .

Dans chacun des cas suivants, dire si la proposition est vraie ou fausse. Justifier la réponse et étudier l'implication réciproque :

- Si f est paire ou impaire alors f' admet également une propriété de parité
- Si f est périodique alors f' est périodique
- Si f est monotone alors f' est monotone
- Si f est bornée alors f' est bornée

Exercice 4 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert non vide et a un point de I.

On dit que la fonction f admet une dérivée symétrique en a si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ existe et est finie.

- Démontrer que si la fonction f est dérivable en a à droite et à gauche, alors elle admet une dérivée symétrique en a .
- Étudier l'implication réciproque.

Exercice 5 Soit f une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} dérivable en un point a . Étudier $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x f(a) - a f(x)}{x - a}$.

Exercice 6 Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} , continue en 0.

Démontrer que si $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ existe et vaut le réel a , alors la fonction f est dérivable en 0.

On commencera par montrer qu'on peut se ramener au cas $a = 0$.

Exercice 7 Donner un exemple simple de fonction définie sur \mathbf{R} qui n'est continue et dérivable qu'en 0.

Exercice 8 On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par :

$$f(0) = 0 \text{ et, pour tout réel } x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

- Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ .
- La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Exercice 9 Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, les zéros de la dérivée n ème de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

(Passer dans l'ensemble des complexes ?)