

Semaine 3 - Dérivation et révision.

- (1) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0 . On dit que θ est une approximation affine de f au voisinage de x_0 s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\theta(x) = f(x_0) + b(x - x_0)$.

On dit que $\tilde{\theta}$ est une meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0 si $\tilde{\theta}$ est une approximation affine de f au voisinage de x_0 et si, pour toute autre approximation affine θ , on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \tilde{\theta}(x)}{f(x) - \theta(x)} = 0.$$

- (a) Démontrer que, si une meilleure approximation affine existe, elle est unique.
 (b) Démontrer que "la" meilleure approximation de f existe au voisinage de x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0 . De plus, dans ce cas, on a $\tilde{\theta}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- (2) Étudier la continuité et la dérivabilité de

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ x & \mapsto 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

- (3) Montrer que

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ x & \mapsto 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

est dérivable sur \mathbb{R} . Est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?

- (4) Que peut-on dire de

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^k \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ x & \mapsto 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

pour k entier, $k \geq 3$?

- (5) On pose $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- (a) Montrer que pour tout $x \neq 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est k fois dérivable et que la dérivée k -ième est de la forme

$$f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{3k}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

où P_k est un polynôme réel.

- (b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est k fois dérivable en 0 et que $f^{(k)}(0) = 0$.

- (c) En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

- (6) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique et dérivable. Montrer que f' est périodique. Réciproquement si une fonction f est dérivable de dérivée f' périodique, peut-on conclure que f est périodique ?

- (7) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable paire (respectivement impaire). Montrer que f' est impaire (respectivement paire). Réciproquement, si une fonction f est dérivable de dérivée f' paire (respectivement impaire), peut-on conclure que f est impaire (respectivement paire) ?

- (8) Soit I une partie finie de \mathbb{N} et $(P_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes non nuls de $K[X]$, $K = \mathbb{Q}$, \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On suppose que l'application $\begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{N} \\ i & \mapsto \deg(P_i) \end{cases}$ est injective. Montrer que la famille $(P_i)_{i \in I}$ est libre. Démontrer le même résultat lorsque le degré des polynômes est remplacé par la valuation.