

Page web : [http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/grellier/Enseignement/ ... /Capes/Capes2007.html](http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/grellier/Enseignement/.../Capes/Capes2007.html)

## Intégrales dépendant d'un paramètre 2

1. Etudier l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{x^2 + y^2} dy$$

en fonction du paramètre réel  $x$ . Plus précisément, montrer que

- (a) cette intégrale définit une fonction  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}^*$ ,
- (b)  $f$  est paire, continue et dérivable (c'est même une fonction de classe  $C^\infty$ ),
- (c)  $f(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow 0$  et  $f(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ .

2. Etudier de même les expressions

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+y^2} dy, \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^x + y^{2x}} dy.$$

3. La fonction *gamma* est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{x-1} dy.$$

- (a) Vérifier que cette définition a un sens pour  $x \in ]0, +\infty[$ .
- (b) Démontrer l'identité  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ .
- (c) Calculer  $\Gamma(n)$  pour  $n$  entier  $> 0$ .
- (d) Calculer  $\Gamma(\frac{1}{2})$  sachant que  $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .
- (e) Montrer que  $\Gamma$  est une fonction continue sur  $]0, +\infty[$ .
- (f) Montrer plus généralement que  $\Gamma$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .
- (g) Vérifier que  $\Gamma(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \xrightarrow{+} 0$ .

*Remarque:* Le comportement à l'infini est donné par la formule de Stirling :

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi} x^x e^{-x} \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

4. Montrer que la fonction

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cos(xy) dy$$

est bien définie sur  $\mathbb{R}$ , dérivable et qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$f'(x) + x f(x) = 0.$$

En déduire une expression explicite de  $f(x)$ , sachant que  $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

5. *Equation de la chaleur sur  $\mathbb{R}$*

Soit  $f$  une fonction continue bornée sur  $\mathbb{R}$ .

(a) Montrer que l'intégrale

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - 2\sqrt{t}y) e^{-y^2} dy$$

est bien définie pour tout  $t \in ]0, +\infty[$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

(b) Montrer que  $u$  est une fonction continue sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

(c) Montrer que

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

possède des dérivées partielles par rapport à  $t$  et par rapport à  $x$ .

(d) Montrer que  $u$  vérifie l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x).$$

(e) Montrer que

$$\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = f(x)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

6. *Problème de Dirichlet dans le demi-plan  $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$*

Soit  $f$  une fonction continue bornée sur  $\mathbb{R}$ .

(a) Montrer que l'intégrale

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + yz) \frac{1}{1+z^2} dz$$

est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $y \in ]0, +\infty[$ .

(b) Montrer que  $u$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+^2$ .

(c) Montrer que

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-z)^2 + y^2} f(z) dz.$$

(d) Montrer que  $u$  possède des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 qu'on calculera.

(e) Montrer que  $u$  est une fonction harmonique dans  $\mathbb{R}_+^2$ , au sens où

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

s'annule.

(f) Montrer que

$$\lim_{y \searrow 0} u(x, y) = f(x)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .