Université d'Orléans
Département de Mathématiques

Préparation au CAPES
Année académique 2007–2008

Page web : http : //www.univ–orleans.fr/mapmo/membres/grellier/Enseignement/ . . .
. . . /Capes/Capes2007.html

Intégration sur un intervalle compact
76. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriété de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.
77. Intégration par parties, par changement de variables. Exemples et applications.

Exercices

1. Trouver une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{x+4}{(x^2+2x+2)^3}$.

2. (a) On obtient $0=1$ en intégrant par parties
$$\int \frac{1}{x\,\ln x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x\,\ln x}\,dx$$
et en simplifiant. Expliquer cette erreur ?
(b) Trouver une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x\,\ln x}$ sur $]\,1, +\infty\,[$.

3. Soit f une fonction continue sur $[\,0, 1\,]$. Montrer que
$$\int_0^1 f(x)\,dx \,=\, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\nolimits_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n}) \,.$$
En déduire le comportement des suites $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$, $d_n = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ (où α est un paramètre réel >-1).

4. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\,a, b\,]$. Montrer que
$$\int_a^b \bigl|f(x)\bigr|\,dx \,=\, 0$$
si et seulement si $f = 0$.

5. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\,a, b\,]$. Montrer que
$$\Bigl|\int_a^b f(x)\,dx\Bigr| \,\le\, \int_a^b \bigl|f(x)\bigr|\,dx \,.$$
Quand a–t–on égalité ?

6. *Inégalité de Cauchy–Schwarz* :
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[\,a, b\,]$. Montrer que
$$\Bigl|\int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx\Bigr| \,\le\, \Bigl(\int_a^b \bigl|f(x)\bigr|^2\,dx\Bigr)^{1/2} \Bigl(\int_a^b \bigl|g(x)\bigr|^2\,dx\Bigr)^{1/2} .$$
Quand a–t–on égalité ?

7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue de période $T > 0$. Montrer que f a la même intégrale sur tout intervalle de longueur T :
$$\forall\, a \in \mathbb{R}\,, \quad \int_a^{a+T} f(x)\,dx \,=\, \int_0^T f(x)\,dx \,.$$

8. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x^k}{k!} + \int_0^x \tfrac{(x-y)^n}{n!}\, e^y\, dy\ .$$

En déduire que

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \tfrac{1}{k!}\ .$$

9. Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k + \tfrac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(y)\,(x-y)^n\, dy\ .$$

10. Montrer que la fonction

$$x \longmapsto \int_1^x \tfrac{\sin y}{y}\, dy$$

est bien définie sur $[\,1,+\infty\,[$ et qu'elle possède une limite à l'infini, qu'on évaluera.

11. (a) Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[\,a,b\,]$. Montrer que les intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\cos(nx)\,dx\,, \qquad \int_a^b f(x)\,\sin(nx)\,dx\,, \qquad \int_a^b f(x)\,e^{inx}\,dx$$

tendent vers 0 lorsque $n\to\pm\infty$.
(b) Etendre ce résultat aux fonctions continues.

12. On considère les *intégrales de Wallis*

$$I_n = \int_0^\pi (\cos nx)^n\, dx \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

(a) Calculer $I_0\,,\ I_1\,,\ I_2\,,\ I_3\,,\ \dots$
(b) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
(c) En déduire que

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\ .$$

13. Considérons la suite dans $\mathbb{R}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \int_0^1 \max\{u_n,t\}\,dt \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

Etudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de la donnée initiale $u_0\in\mathbb{R}$.

14. Soit $f:[\,0,+\infty\,[\longrightarrow[\,0,+\infty\,[$ une fonction continue. Posons, pour tout $x\in\,]\,0,+\infty\,[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$M(x) = \sup_{t\in[0,x]} f(t) \quad \text{et} \quad u_n = \Big(\int_0^x f(t)^n\,dt\Big)^{1/n}\ .$$

(a) Montrer que $u_n(x) \le M(x)\,x^{1/n}$.
(b) En utilisant la continuité de f, montrer que, quel que soit $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que $u_n(x) \ge \delta^{1/n}\,[M(x)-\varepsilon\,]$.
(b) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = M(x)\,.$$