Département de Mathématiques **Préparation CAPES**
Université d'Orléans **2007-2008**

Isométries affines du plan

1. Monsieur Bio possède un terrain bordé par une rivière rectiligne $\mathcal{R}$. Sur ce terrain il a construit une maison M et cultive son potager P. Déterminer pour lui le chemin le plus court pour aller de sa maison au potager en remplissant son arrosoir à la rivière.
2. Dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$, on considère pour $i = 1, 2$, la rotation R_i de centre A_i et d'angle $\theta_i \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que R_1 et R_2 commutent si et seulement si $A_1 = A_2$, par 3 méthodes :
   – En utilisant l'unicité du centre de rotation.
   – En utilisant les nombres complexes.
   – En décomposant R_i en produit de 2 symétries.
3. Dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ orienté, soit ABC un triangle équilatéral tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ait pour mesure $+\dfrac{\pi}{3}$. Soient $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle et D le point sur $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à A.
   Déterminer $S_{BD} \circ S_{CD} \circ S_{AC} \circ S_{AB}$ (S_{MN} désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite MN).
4. Soit G le groupe des isométries d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$.
   (a) Soit D l'application de G dans G qui à f associe f^2.
      (i) Quels éléments de G ont exactement un antécédent par D ?
      (ii) Quels éléments de G ont exactement deux antécédents par D ?
      (iii) Quels éléments de G ont une infinité d'antécédents par D ?
   (b) Mêmes questions pour l'application $f \longmapsto f^3$.
5. Dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ construire un pentagone connaissant les milieux I, J, K, L et M de ses côtés (On pourra considérer $S_M \circ S_L \circ S_K \circ S_J \circ S_I$).
6. Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ des droites distinctes d'un plan affine euclidien. On désigne par s_i la réflexion par rapport à $\mathcal{D}_i$, pour $i = 1 \dots 3$ et on pose $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$. On veut montrer que :
   f est involutive si et seulement si les trois droites sont concourantes ou parallèles.
   (a) Montrer que f est involutive lorsque les trois droites sont parallèles.
   (b) Montrer que f est involutive f lorsque les trois droites sont concourantes.
   (c) Réciproquement, on suppose que f est involutive.
      (i) Que peut-on dire si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles ?
      (ii) Que peut-on dire si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes ?
   (d) Conclure.
7. On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$.
   (a) Soit f un anti-déplacement de $\mathcal{P}$. Montrer que les milieux des segments $[M, f(M)]$ pour M décrivant $\mathcal{P}$, sont alignés.
   (b) Soit g un déplacement de $\mathcal{P}$. Montrer que les milieux des segments $[M, g(M)]$ pour M décrivant $\mathcal{D}$, sont alignés.
8. Dans un plan affine euclidien, construire un triangle équilatéral dont les sommets sont situés :
   (a) sur trois droites strictement parallèles,
   (b) sur trois cercles concentriques distincts.