UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2006-2007**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 2 - Comportement asymptotique des fonctions.

(1) Soit f la fonction définie par
$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}.$$
Étudier f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal en précisant l'allure des branches infinies.

(2) Soit f la fonction telle que
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+1}.$$
Étudier f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Comparer sa branche infinie avec celle de $g(x) = \sqrt{x} - 1$.

(3) Soit f la fonction donnée par
$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$
Étudier f et préciser ses branches infinies. On précisera la position de la courbe représentative de f par rapport à ses asymptotes.

(4) Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(0) & = & 0 \\ f(x) & = & x\sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

(5) Montrer que la courbe Γ représentative de la fonction f donnée par
$$f(x) = \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$$
admet un centre de symétrie.

Soit Γ' la courbe représentative de la fonction g donnée par
$$g(x) = \frac{2x-1}{(1-x+x^2)^2}.$$
Déterminer une transformation du plan ϕ telle que $\Gamma' = \phi(\Gamma)$.

(6) Étudier la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$. Étudier les branches infinies de sa courbe représentative Γ dans un repère orthonormé et la tracer. Montrer que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de Γ.

(7) Étudier la fonction
$$f : x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}.$$
Étudier les branches infinies et tracer la courbe représentative de f.

(8) Étudier la fonction
$$f : x \mapsto \frac{x^3+x^2+1}{x^2+1}.$$
Étudier les branches infinies et tracer la courbe représentative de f. Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

(9) Étudier la fonction
$$f : x \mapsto \sqrt{x(x+2)}e^{\frac{1}{x}}.$$
Étudier les branches infinies et tracer la courbe représentative de f.