Département de Mathématiques **Préparation CAPES**
Université d'Orléans **2007-2008**

Applications du produit scalaire ou vectoriel

1. Dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_3$, soit $ABCD$ un tétraèdre régulier et M un point de la droite (AC). Déterminer la position du point M pour que l'angle $\widehat{BMD}$ soit maximal.
   (On pourra considérer le milieu I de AC et poser $\overrightarrow{IM} = x\overrightarrow{AC}$).

2. Dans l'espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}_3$, on considère un cube $ABCDEFGH$ tel que $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ soit un repère orthonormal direct. On désigne par K le centre de la face $ADHE$ et par I le milieu de l'arête $[EF]$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$.
   (b) En déduire l'aire du triangle IGA.
   (c) Calculer le volume du tétraèdre $ABIG$.
   (d) En déduire la distance du point B au plan (AIG).

3. Dans l'espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}_3$, soit $ABCD$ un tétraèdre.
   (a) On pose $2\overrightarrow{S_1} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$, $2\overrightarrow{S_2} = \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{S_3} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{S_4} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.
   Montrer que $\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3} = \overrightarrow{S_4}$.
   (b) On considère les points, M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AP} = \gamma\overrightarrow{AD}$ avec $(\alpha,\beta,\gamma) \in]0,1[^3$ et on pose $2\overrightarrow{T} = \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP}$
      (i) Exprimer $\overrightarrow{T}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{S_1}$, $\overrightarrow{S_2}$ et $\overrightarrow{S_3}$.
      (ii) Montrer que pour tout réel ρ on a : $\overrightarrow{T} = (\beta\gamma - \rho)\overrightarrow{S_1} + (\gamma\alpha - \rho)\overrightarrow{S_2} + (\alpha\beta - \rho)\overrightarrow{S_3} + \rho\overrightarrow{S_4}$.
      (iii) En prenant $\rho = \min(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)$, montrer que $\|\overrightarrow{T}\| \leqslant \max\{\|\overrightarrow{S_k}\|\,;\, k = 1,\ldots,4\}$.
   (c) En déduire la section plane d'aire maximale du tétraèdre.

4. Un bateau file à 7 nœuds à partir d'un point A situé en mer vers un point C situé sur la côte. Sur cette côte il y a également un phare P. A dix heures le bateau est en A et l'officier de quart relève l'angle $\widehat{CAP}$: 65° ; à onze heures le bateau est en B et l'officier relève l'angle $\widehat{CBP}$: 78°.
   (a) A quelle distance du phare se trouve le bateau lorsqu'il est en A ?
   (b) A quelle distance du phare se trouve le bateau lorsqu'il est en B ?
   (c) La carte indique $CP = 64{,}5$ km. A quelle heure le bateau arrivera-t-il en C ?

   (1 nœud correspond à une vitesse d'un mille marin par heure et un mille marin vaut 1852 m).